



TESIS-SM 142501

**MAGNETOHIDRODINAMIK YANG TAK TUNAK
PADA LAPISAN BATAS YANG MENGALIR
MELALUI BOLA DI DALAM FLUIDA MIKROKUTUB
DI BAWAH PENGARUH MEDAN MAGNET**

Rizky Verdyanto Pratomo
1215 201203

DOSEN PEMBIMBING
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.

Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

**PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2017**



THESIS-SM 142501

**UNSTEADY MAGNETOHYDRODYNAMICS
MICROPOLAR FLUID IN BOUNDARY LAYER
FLOW PAST A SPHERE UNDER THE
INFLUENCE OF MAGNETIC FIELD**

Rizky Verdyanto Pratomo
1215 201 203

SUPERVISOR
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.

Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

**MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2017**

**MAGNETOHIDRODINAMIK YANG TAK TUNAK PADA
LAPISAN BATAS YANG MENGALIR MELALUI BOLA DI
DALAM FLUIDA MIKROKUTUB DI BAWAH PENGARUH
MEDAN MAGNET**

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

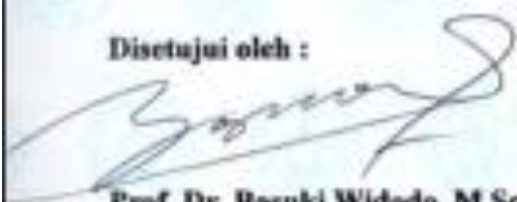
Oleh :

RIZKY VERDYANTO PRATOMO
NRP. 1215 201 203

Tanggal Ujian : 17 Juli 2017


Periode Wisuda: September 2017

Disetujui oleh :




Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

(Pembimbing 1)



Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.
NIP. 19830517 200812 1 003

(Pembimbing 2)



Dr. Hariyanto, M.Si.
NIP. 19530414 198203 1 002

(Penguji)



Dr. Darmaji, S.Si., MT.
NIP. 19691015 199412 1 001

(Penguji)



Dekan FMIPA,

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

**MAGNETOHIDRODINAMIK YANG TAK TUNAK PADA LAPISAN
BATAS YANG MENGALIR MELALUI BOLA DI DALAM FLUIDA
MIKROKUTUB DI BAWAH PENGARUH MEDAN MAGNET**

Nama Mahasiswa : Rizky Verdyanto Pratomo
NRP : 1215201203
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

ABSTRAK

Kajian-kajian tentang aliran fluida tentunya sangat menarik untuk dipelajari, mengingat begitu banyaknya manfaat yang dapat diperoleh dan diterapkan dalam berbagai aspek kehidupan. Kajian tentang aliran fluida yang saat ini banyak diteliti adalah Magnetohidrodinamik (MHD). Magnetohidrodinamik adalah suatu kajian tentang aliran fluida penghantar listrik yang dipengaruhi oleh medan magnet. Pada penelitian ini dikaji dan diteliti pengaruh medan magnet pada aliran fluida magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet secara teori dengan mengkonstruksi model matematikanya dan kemudian model matematika yang diperoleh akan diselesaikan secara numerik dengan skema Keller-Box kemudian disimulasikan secara numerik untuk mengkaji pengaruhnya terhadap profil kecepatan aliran fluida dan profil mikrorotasi partikelnya. Hasil dari penelitian menunjukkan semakin besar parameter magnetik, maka semakin meningkat pula profil kecepatan aliran fluida mikrokutub. Selain itu semakin besar parameter bahan, maka semakin menurun profil kecepatan aliran fluida mikrokutub serta Semakin besar parameter magnetik, maka profil mikrorotasi akan semakin kecil untuk $n = 0$. Sedangkan untuk $n = 0,5$ dan $n = 1$, semakin besar parameter magnetik, maka profil mikrorotasi akan semakin besar.

Kata Kunci : Magnetohidrodinamik, Fluida Mikrokutub, Skema Keller-Box.

UNSTEADY MAGNETOHYDRODYNAMICS MICROPOLAR FLUID IN BOUNDARY LAYER FLOW PASS A SPHERE INFLUENCE OF MAGNETIC FIELD

Name : Rizky Verdyanto Pratomo
NRP : 1215201203
Supervisor : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

ABSTRACT

Research about fluid flow was very interesting because have a lot of advantage and can be applied in many aspect of life. The study on fluid flow which is now widely studied is the magnetohydrodynamic (MHD). Magnetohydrodynamic is a conductivity, flow or movement of a fluid or electrically in a magnetic field. This research has reviewed and investigated the effect of magnetic fields on the flow of fluid magnetohydrodynamic are unsteady on the boundary layer that flows through the sphere in the fluid mikrokutub under the influence of a magnetic field in theory to create a model of math and then the system of equations obtained will be solved numerically with Keller-Box scheme then numerically simulated to assess its effect on the fluid flow velocity profile and the profile micro rotation particles. The result of this research indicate increasing the magnetic parameters, increasing velocity profile. Increasing material parameters, decreasing velocity profile and increasing magnetic parameters, decreasing microrotation profile for $n = 0$. While for $n = 0,5$ and $n = 1$, increasing magnetic parameters, increasing microrotation profile.

Keywords : Magnetohydrodynamic, Micropolar Fluid, Keller-Box Scheme

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahNya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis dengan judul "Magnetohidrodinamik Yang Tak Tunak Pada Lapisan Batas Yang Mengalir Melalui Bola Di Dalam Fluida Mikroktub Di Bawah Pengaruh Medan Magnet"

Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 2 (S-2) Program Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Dalam penyusunan Tesis ini, penulis banyak mendapat bimbingan, petunjuk dan saran dari berbagai pihak. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.Es., Ph.D., selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.
2. Bapak Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc, selaku Dekan MIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya dan dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, perhatian, arahan, nasehat, dan motivasi kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis ini dengan baik.
3. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si., M.T., selaku Kepala Departemen Matematika ITS.
4. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si., selaku Ketua Program Studi Pasca Sarjana Matematika.
5. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si., selaku Dosen Wali yang telah memberikan bimbingan, kritik, dan saran selama menempuh pendidikan Pasca Sarjana.
6. Bapak Dr. Dieky Adzkiya, S. Si., M. Si., selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, perhatian, arahan,

nasehat, dan motivasi kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis ini dengan baik.

7. Bapak Dr. Drs. Hariyanto, M.Si., dan Bapak Dr. Darmaji, S. Si., MT. selaku dosen penguji atas masukan, kritik, dan saran sehingga penulis dapat memperbaiki Tesis ini.
8. Segenap Dosen dan seluruh Staff Karyawan Jurusan Matematika ITS yang telah memberikan bekal ilmu pengetahuan dan juga atas segala bantuan, kemudahan, serta memberikan kelancaran kepada penulis selama pendidikan Pasca Sarjana.
9. Kedua orang tua tercinta, Bapak Nyoto Utomo dan Ibu Novita Indrayani serta adik Dody Novyanto Pratomo, dan yang telah memberikan doa dan dukungan hingga terselesaikannya Tesis ini.
10. Yulianti, S.M. atas segala doa, dukungan, nasehat, perhatian, dan motivasi kepada penulis hingga terselesaikannya Tesis ini.
11. Tim Penelitian CFD, Nadya Alvi, S.Pd., Pingkan A M Palyama, S.Si., dan Mochamad Satria Dharma Utama atas segala dukungan, kerjasama, dan motivasi dalam hal diskusi materi terkait penelitian hingga terselesaikannya Tesis ini.
12. Rita Ayu Ningtyas, S.Si., M.Si. , Indira Anggriani, S.Si., M.Si., dan Firdha Dwishafarina Zainal, S.Si., M.Si. yang memberikan saran dan menjadi rekan diskusi terkait Tesis yang dikerjakan penulis.
13. Deriyan Senjaya, S.Si. dari Grup Fisika Teoritik FMIPA ITB yang menjadi rekan diskusi terkait Tesis yang dikerjakan penulis.
14. Teman-teman S2 Matematika ITS angkatan 2015 genap yang telah menemani, memberikan dukungan dan segala bantuan selama perkuliahan.
15. Pihak-pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang telah banyak membantu dalam menyelesaikan skripsi ini

Semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi penulis sendiri, para pembaca dan bermanfaat pengembangan wawasan keilmuan serta dapat memberikan kontribusi terhadap kemajuan ITS, agama, bangsa, dan negara. Penulis menyadari bahwa

laporan Tesis ini masih banyak kekurangan, sehingga sangat membutuhkan kritik dan saran yang membangun dari semua pihak untuk perbaikan laporan Tesis ini.

Penulis

DAFTAR ISI

PENGESAHAN.....	V
ABSTRAK.....	Vii
ABSTRACT.....	Ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xv
DAFTAR GAMBAR.....	xvii
DAFTAR TABEL.....	xix
DAFTAR SIMBOL.....	xxi
BAB I. PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Batasan Penelitian.....	3
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian.....	4
BAB II. KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI.....	7
2.1 Penelitian Terdahulu	7
2.2 Fluida Berdasarkan Tingkat Kekentalan.....	7
2.3 Aliran Fluida Berdasarkan Waktu.....	9
2.4 Aliran Lapisan Batas (<i>Boundary Layer</i>).....	9
2.5 MHD dan Efek pada Fluida Mikroktub	10

	2.6 Skema Keller-Box.....	15
BAB III.	METODE PENELITIAN.....	17
	3.1 Tahapan Penelitian	17
	3.2 Tempat Penelitian.....	19
	3.3 Jadwal Penelitian.....	19
BAB IV	MODEL MATEMATIKA.....	21
	4.1 Persamaan Pembangun.....	22
	4.2 Trasnformasi Variabel Tak Berdimensi.....	34
	4.3 Pendekatan Lapisan Batas.....	35
	4.4 Fungsi Alir.....	36
	4.5 Persamaan Similaritas.....	38
BAB V	PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA	43
	5.1 Langkah-langkah Metode Keller-Box.....	43
	5.2 Hasil Simulasi Numerik.....	62
BAB VI	KESIMPULAN DAN SARAN.....	79
	6.1 Kesimpulan	79
	6.2 Saran.....	79
	DAFTAR PUSTAKA.....	81

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1.	Bola yang dilalui aliran fluida.....	2
Gambar 2.2.	Skema Keller-Box.....	16
Gambar 4.1.	Sistem Fisis.....	21
Gambar 4.2	Aliran Fluida melalui Control Volume.....	21
Gambar 4.3	Gaya-gaya Permukaan pada Elemen Fluida.....	26
Gambar 5.1	Gambar Stensil Beda Hingga.....	44
Gambar 5.2	Perbedaan Profil Kecepatan pada 3 Kasus yang berbeda	63
Gambar 5.3	Profile Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik $K = 1, n = 0$	64
Gambar 5.4	Profile Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik $K = 1, n = 0,5$	65
Gambar 5.5	Profile Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik $K = 1, n = 1$	66
Gambar 5.6	Perbedaan Profil Kecepatan dengan adanya pengaruh parameter bahan pada 3 Kasus yang berbeda.....	67
Gambar 5.7	Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Bahan, $M = 1, n = 0$	68
Gambar 5.8	Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Bahan,	69

Gambar 5.9	$M = 1, n = 0,5$	70
	Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Bahan,	
Gambar 5.10	$M = 1, n = 1$	71
	Perbedaan Profil Mikrorotasi dengan variasi parameter magnetik pada 3 Kasus yang berbeda.....	
Gambar 5.11		72
	Profil Mikrorotasi dengan Variasi Parameter Magnetik, $K = 1, n = 0$	
Gambar 5.12		73
	Profil Mikrorotasi dengan Variasi Parameter Magnetik, $K = 1, n = 0,5$	
Gambar 5.13		74
	Profil Mikrorotasi dengan Variasi Parameter Magnetik, $K = 1, n = 1$	
Gambar 5.14	Perbedaan Profil Mikrorotasi dengan variasi parameter mikropolar pada 3 Kasus yang berbeda.....	75
Gambar 5.15	Profil Mikrorotasi dengan Variasi Parameter Bahan, $M = 1, n = 0$	76
Gambar 5.16	Profil Mikrorotasi dengan Variasi Parameter Bahan, $M = 1, n = 0,5$	77
Gambar 5.17	Profil Mikrorotasi dengan Variasi Parameter Bahan, $M = 1, n = 1$	78

DAFTAR TABEL

Tabel 3.3.	Jadwal Penelitian.....	19
------------	------------------------	----

DAFTAR SIMBOL

τ	:	Tegangan geser.
μ	:	Viskositas Fluida.
u	:	Komponen kecepatan fluida pada sumbu – x .
y	:	Jarak daerah pengamatan terhadap permukaan bola.
t	:	Waktu.
U_{∞}	:	Kecepatan fluida pada aliran bebas.
a	:	Jari-jari bola.
V	:	Viskositas kinematis.
v	:	Komponen kecepatan fluida pada sumbu – y .
ρ	:	Densitas fluida.
p	:	Tekanan.
J	:	Kerapatan arus.
B	:	Gaya Magnet.
γ	:	Konstanta material.
E	:	Medan listrik.

BAB I

PENDAHULUAN

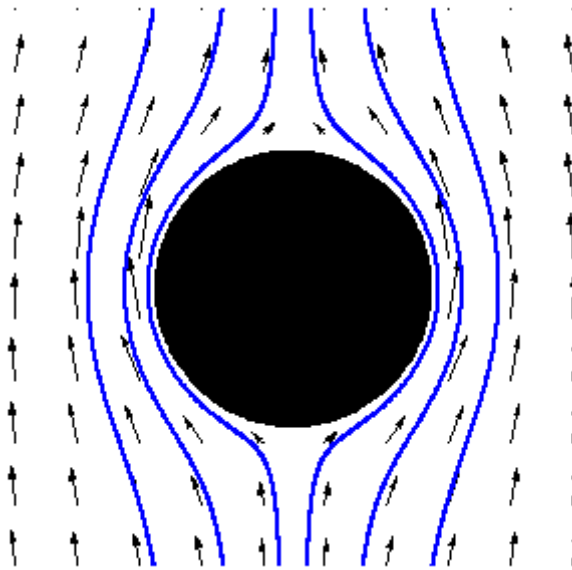
1.1.Latar Belakang

Mekanika fluida banyak dijumpai dalam setiap aspek kehidupan manusia. Contohnya ialah pada proses pemindahan fluida (*fluid transport*) yang meliputi pasokan air minum, pasokan gas alam, dan pemipaan zat-zat kimia pada pabrik. Selain itu pada pembangkit tenaga listrik yang menggunakan fluida cair dan gas serta masih banyak lagi yang lainnya.

Kajian-kajian tentang aliran fluida tentunya sangat menarik untuk dipelajari, mengingat begitu banyaknya manfaat yang dapat diperoleh dan diterapkan dalam berbagai aspek kehidupan. Kajian tentang aliran fluida yang saat ini banyak diteliti adalah Magnetohidrodinamik (MHD). Istilah magnetohydrodynamic terdiri dari kata “*magneto*” yang berarti “*medan magnetik*”, “*hydro*” yang berarti “*cairan/fluida*”, dan “*dynamic*” yang berarti “*pergerakan*”. Magnetohydrodynamic (MHD) dapat diartikan sebagai suatu kajian tentang aliran fluida penghantar listrik yang dipengaruhi oleh medan magnet. Fluida yang dimaksud dapat berupa plasma, logam cair, atau air garam.

Fluida sendiri ditinjau dari densitas atau kerapatannya dibagi menjadi 2, yaitu fluida yang mampu mampat (*compresible*) dan fluida yang tak mampu mampat (*incompresible*). Sedangkan ditinjau dari viskositas atau kekentalannya, secara umum fluida dibedakan menjadi 2, yaitu : Fluida Kental (*Newtonian Fluid*) dan Fluida Tak Kental (*Non Newtonian Fluid*). Jika suatu fluida mengalir melewati suatu benda akan terbentuk sebuah lapisan yang dinamakan lapisan batas (*Boundary Layer*). Hal ini terjadi karena adanya gesekan permukaan benda dengan fluida disertai faktor kekentalan fluida.

Berikut ini adalah gambaran tentang lapisan batas :



Gambar 1.1. : Bola yang dilalui aliran fluida

Pada permasalahan yang nyata, berbagai macam fluida yang terjadi pada berbagai macam keadaan tidak selalu dapat dinyatakan sebagai fluida Newtonian (Widodo, 2012; Widodo, 2013). Beberapa diantaranya kontradiksi dengan karakteristik fluida Newtonian dan jenis fluida ini biasa dikenal dengan Fluida Non-Newtonian. Terdapat beberapa jenis fluida yang termasuk dalam kategori ini, misalnya fluida nano dan fluida mikroktub. Fluida mikroktub sekarang ini mendapat perhatian lebih berkenaan dengan aplikasinya dalam proses di bidang teknik (Widodo dkk, 2015c; Widodo dkk, 2015d). Fluida mikroktub ini mendukung *body couples* dan berakibat pada perilaku mikrorotasi. Teori fluida mikroktub ini menunjukkan prediksi sifat fluida dalam skala mikro. Contohnya adalah fluida magnetik, debu yang pekat, dan beberapa fluida biologis (Eringen, 2001). Melihat potensi aplikasinya dalam skala mekanika fluida mikro dan mekanika fluida Non-Newtonian, hal ini cukup menarik untuk dieksplor penyelesaian dasar yang baru (Rumite dkk, 2015; Widodo dkk, 2015a; Widodo dkk, 2015b).

Berdasarkan pengamatan dari pengaruh magnetohidrodinamik pada fluida mikroktub telah banyak dilaksanakan penelitian, misalnya oleh Satya Narayana dkk (2013), Srinivasacharya dan Upendar (2013), serta Anggriani (2015). Banyak kasus pada magnetohidrodinamik fluida mikroktub pada lapisan batas dikaji sebagai kasus dalam keadaan tunak atau *steady-state*. Padahal pada lapisan

batas, perubahan waktu berperan penting. Sementara itu, aliran fluida melalui suatu bola padat dan melibatkan gaya tarikan yang timbul disekitarnya, kejadian ini dipahami melalui identifikasi pemisahan aliran dan hal tersebut terjadi untuk aliran tak tunak. Mohammad dkk (2012) telah mengamati separasi aliran dalam dimensi dua dan tunak pada lapisan batas yang mengalir melewati sebuah bola dalam fluida mikrokutub tanpa memperhatikan adanya medan magnet.

Pada penelitian Anggriani 2015 tentang pengaruh magnetohidrodinamik pada fluida mikrokutub yang melewati bola berpori di konstruksi beberapa model matematika dari fenomena tersebut yaitu :

1. Persamaan kontinuitas,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{r}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{r}\bar{v}) = 0$$

2. Persamaan momentum linier,

sumbu-x :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + k \frac{\partial \bar{N}}{\partial y} - \sigma B_0^2 \bar{u} - \frac{\mu}{K^*} \bar{u}$$

sumbu-y :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) - k \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} - \sigma B_0^2 \bar{v} - \frac{\mu}{K^*} \bar{v}$$

3. Persamaan momentum angular,

$$\rho I \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial y} \right) = \gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial y^2} \right) - k \left(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)$$

Dalam penelitian ini dikaji dan diteliti pengaruh medan magnet pada aliran fluida magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub secara teori dengan mengkonstruksi model matematikanya dan selanjutnya disimulasikan secara numerik untuk mengkaji pengaruhnya terhadap profil kecepatan aliran fluida dan profil mikrorotasi partikelnya. Hal ini adalah sesuatu yang belum pernah dilakukan oleh peneliti-peneliti lain dan menghasilkan penyelesaian baru.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang di atas, maka dapat dibuat rumusan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet?
2. Bagaimana penyelesaian model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet menggunakan metode beda hingga dengan skema Keller-Box?
3. Bagaimana pengaruh magnetohidrodinamik pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub terhadap profil kecepatan aliran fluida dan profil mikrorotasi partikel dengan adanya perubahan waktu?

1.3. Batasan Penelitian

1. Geometri benda pada penelitian ini yang diamati adalah bola pejal bermagnet.
2. Fluida mengalir dari bawah ke atas.
3. Penelitian ini difokuskan pada aliran lapisan batas yang terletak disekitar titik stagnasi terendah $\alpha = 0^\circ$.
4. Aliran fluida diasumsikan *incompressible* karena tidak dibawah pengaruh tekanan, dalam keadaan tak tunak, laminar dua-dimensi yang mengalir secara seragam melintang pada daerah medan magnet.
5. Induksi medan magnet tidak diabaikan.
6. Tidak ada tegangan pada aliran fluida sehingga medan listrik nol dan medan magnet yang dihasilkan merupakan pengaruh dari gaya Lorentz.
7. Untuk mendapatkan penyelesaian dari persamaan diferensial biasa tak linear digunakan metode beda hingga implisit dengan skema pembaganan numerik Keller-Box.

1.4. Tujuan Penelitian

Dari rumusan masalah yang dibuat, maka tujuan dilaksanakannya penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengkonstruksi model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet

2. Menyusun penyelesaian dari model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet untuk mengetahui profil kecepatan dan profil mikrorotasi dari sistem yang dikaji.
3. Menganalisa pengaruh magnetohidrodinamik pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub terhadap profil kecepatan aliran fluida dan profil mikrorotasi partikel dengan adanya perubahan waktu

1.5. Manfaat Penelitian

Dengan dilakukannya penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi :

1. Bidang Keilmuan

Diharapkan penelitian ini dapat memberikan kontribusi nyata dalam perkembangan ilmu matematika terapan yang sangat banyak manfaatnya bagi kehidupan manusia yang salah satunya pada proses pengeboran minyak yang melibatkan objek yang dimasukkan kedalam lapisan tanah untuk mengeluarkan minyak yang terdapat di dalam atau sela-sela batuan dalam tanah. Selain itu pada bidang industri, kelautan, dan lain-lain.

2. Peneliti Lain

Diharapkan penelitian ini dapat dijadikan referensi bagi peneliti lain untuk lebih mengembangkan ilmu matematika terapan, khususnya tentang fluida.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

2.1. Penelitian Terdahulu

Beberapa penelitian terdahulu yang relevan dengan penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Penelitian dari Widodo, Dkk (2016)

Dalam penelitian ini dikaji mengenai magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melewati bola teriris. Hasil penelitian menunjukkan semakin meningkat parameter magnetik maka kecepatan aliran akan semakin meningkat, dan semakin meningkat parameter magnetik, kecepatan mikrorotasi akan semakin menurun untuk $n = 0$ dan semakin besar sudut irisan bola teriris, maka kecepatan aliran fluida akan semakin meningkat.

2. Penelitian dari Widodo, Dkk (2015)

Dalam penelitian ini dikaji mengenai aliran lapisan batas pada fluida mikrokutub magnetohidrodinamik yang melewati bola berpori. Hasil penelitian menunjukkan bahwa profil kecepatan meningkat ketika parameter magnetik meningkat dan parameter porositas meningkat, sedangkan kecepatan menurun dengan bertambahnya parameter micropolar dan permeabilitas.

3. Penelitian dari Mohammad (2014)

Dalam penelitian ini dikaji mengenai aliran lapisan batas MHD tak tunak. Hasil penelitian menunjukkan bahwa peningkatan parameter magnetik menyebabkan semakin menebalnya lapisan batas, meningkatnya kecepatan aliran dan menurunnya temperatur.

2.2.Fluida Berdasarkan Tingkat Kekentalan.

Ditinjau dari viskositas atau kekentalannya, secara umum fluida dibedakan menjadi 2, yaitu : Fluida Kental (*Newtonian Fluid*) dan Fluida Tak Kental (*Non Newtonian Fluid*).

1. Fluida Newton

Fluida Newton adalah fluida yang menunjukkan hubungan linier antara tegangan geser dan gradien kecepatan. Contoh dari fluida newton adalah

udara, air, dan minyak. Viskositas atau kekentalan dari suatu fluida newtonian bergantung pada tekanan dan temperatur. Viskositas dari fluida newton tidak berubah, meskipun ada gaya yang bekerja pada fluida. Berikut ini adalah hubungan antara tegangan geser dan gradien kecepatan :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

τ = tegangan geser pada fluida $\left(\frac{N}{m^2}\right)$

μ = viskositas fluida $\left(\frac{N}{m^2} \cdot s\right)$

$\frac{du}{dy}$ = gradien kecepatan fluida (s^{-1})

2. Fluida Non Newton

Fluida Non Newton adalah fluida yang akan mengalami perubahan kekentalan ketika terjadi gaya pada fluida tersebut. Hal ini membuat fluida non newton memiliki tingkat kekentalan atau viskositas yang tidak tetap. Salah satu contoh dari fluida non newton adalah fluida mikrokutub.

Fluida mikrokutub adalah fluida dengan struktur mikro yang terdiri dari partikel kaku yang berorientasi secara acak pada media kental yang memiliki kemampuan mikrorotasi. Teori tentang fluida mikrokutub pertama kali diperkenalkan oleh Eringen (1965) dan membuat banyak peneliti berminat mengembangkan teori tersebut yakni salah satunya mengkaji tentang efek mikrorotasi terhadap fluida. Dalam fluida mikrokutub, partikel kaku terkandung di dalam elemen volume kecil yang dapat memutar pusat volume dijelaskan oleh vektor mikrorotasi (Satya Narayana dkk. 2013; Uddin dan Kumar. 2013; Widodo dkk.2016). Dalam kehidupan sehari-hari, fluida yang termasuk golongan mikrokutub adalah cairan koloid, suspensi polimer, suspensi lumpur, dan cairan di pembuluh darah manusia dan hewan (Abdel-Rahman. 2009; Uddin dan Kumar. 2013).

Sifat yang menarik dari fluida mikrokutub ialah, walaupun termasuk golongan fluida tak kental (inviscid), model dari mikrokutubnya dapat disimpulkan ke dalam persamaan Navier-Stokes yang digunakan dalam fluida kental (viskos). Hal tersebut karena sifat dari fluida mikrokutub yang menyerupai fluida viskos klasik yang menjauhi permukaan objeknya.

2.3. Aliran Fluida Berdasarkan Waktu

Aliran fluida yang memiliki pengaruh terhadap perubahan waktu pada umumnya dibagi menjadi dua, yaitu : (Widodo, 2012)

1. Aliran Tunak (*Steady State*) berarti kecepatan aliran fluida tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tunak berlaku :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

2. Aliran Tak Tunak (*Unsteady State*) berarti kecepatan aliran fluida dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tak tunak berlaku :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$$

2.4. Aliran Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Lapisan batas adalah suatu lapisan yang terbentuk di sekitar penampang suatu benda yang dilalui fluida akibat faktor gesekan dan viskositas fluida. Teori lapisan batas dikemukakan oleh Ludwig Prandtl seorang ahli aerodinamika asal Jerman pada tahun 1904. Sebelumnya pada tahun 1755, seorang ahli hidrodinamika bernama Leonhard Euler mengemukakan aliran tanpa gesekan dan kemudian dinyatakan ke dalam persamaan Euler. Dengan banyaknya kontradiksi terhadap hasil eksperimennya, persamaan Euler dijelaskan dan dikaji lebih rinci untuk kondisi aliran bergesekan oleh Navier pada tahun 1827 dan oleh Stokes pada tahun 1845 yang sekarang dikenal dengan persamaan Navier-Stokes.

Aliran fluida pada lapisan batas menurut perbandingan gaya-gaya inersia beserta viskositasnya terdiri dari tiga jenis aliran yaitu aliran laminar, aliran turbulen, dan aliran transisi. (Widodo.2015)

1. Aliran Laminar

Aliran laminar adalah aliran yang partikel-partikelnya bergerak teratur mengikuti lintasan yang saling sejajar. Aliran ini terjadi ketika bilangan Reynolds fluida kurang dari 500 ($Re < 500$) atau pada saat fluida bergerak perlahan dengan kecepatan yang kecil dan atau fluida memiliki tingkat kekentalan atau viskositas yang besar.

2. Aliran Turbulen

Aliran turbulen adalah aliran yang partikel-partikelnya bergerak secara acak dan tidak beraturan. Aliran ini terjadi ketika bilangan Reynolds fluida lebih dari 12.500 ($Re < 12.500$)

3. Aliran Transisi

Aliran transisi adalah aliran yang terjadi antara aliran laminar dan turbulen karena terjadi perubahan viskositas dan kecepatan yang menyebabkan daya redam terhadap gangguan akan berkurang hingga batas tertentu. Aliran ini terjadi ketika bilangan Reynolds fluida berkisar antara 500 sampai 12.500 ($500 < Re < 12.500$).

Bilangan Reynold untuk suatu aliran fluida dapat dihitung dengan menggunakan rumus berikut :

$$Re = \frac{U_{\infty} a}{V}$$

Re = Bilangan Reynolds

U_{∞} = Kecepatan pada aliran bebas (m/s)

a = Panjang karakteristik

V = Viskositas kinematik

2.5. Magnetohidrodinamik dan Efek pada Fluida Mikroktub

Istilah *magnetohydrodynamic* terdiri dari kata “*magneto*” yang berarti “*medan magnetik*”, “*hydro*” yang berarti “*cairan/fluida*”, dan “*dynamic*” yang berarti “*pergerakan*”. Magnetohydrodynamic (MHD) dapat diartikan sebagai suatu hantaran dan pergerakan suatu fluida secara elektrik di dalam suatu medan magnetik. Fluida yang dimaksud dapat berupa plasma, logam cair, atau air garam.

Bentuk ideal dari persamaan MHD yaitu persamaan-persamaan fluida yang meliputi persamaan kontinuitas, persamaan energi, dan untuk persamaan pada medan magnetnya menggunakan persamaan Maxwell. Berikut ini adalah persamaan-persamaan dasar untuk membuat persamaan MHD yang ideal :

1. Persamaan momentum :

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + J \times B$$

2. Persamaan konservasi massa :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$$

3. Persamaan konservasi energi :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

4. Persamaan Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} p \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

dimana :

\mathbf{B} = Medan magnet (0,0, B)

\mathbf{E} = Medan listrik (0, 0, E)

\mathbf{u} = Kecepatan massa plasma

\mathbf{J} = Kerapatan arus ($J_x, J_y, 0$)

ρ = Massa jenis

p = Tekanan plasma

t = Waktu

μ_0 = Permeabilitas ruang hampa ($4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$)

Pada persamaan MHD di atas, persamaan (2.2) pada persamaan Maxwell tidak digunakan. Persamaan (2.2) hanya dipakai saat kondisi awal saja. Selain itu, untuk kecepatan rendah, perpindahan arusnya bisa diabaikan atau dianggap nol (Arber. 2013). Sehingga persamaan umum dari MHD menjadi :

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Untuk mendapatkan besar medan listrik digunakan persamaan di bawah ini :

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}$$

Bila $\eta = 0$, maka persamaan MHD tersebut disebut sebagai persamaan magnetohidrodinamik ideal.

Pada kehidupan nyata, fluida tidak dapat dengan mudah direpresentasikan atau dimodelkan sebagai fluida kental dengan menerapkan Hukum Newton atau persamaan Navier-Stokes. Ada beberapa sifat-sifat khusus yang perlu diperhatikan dalam mempelajari aliran fluida. Secara umum, semua fluida yang tidak sesuai dengan hukum Newton digolongkan sebagai fluida non Newtonian. Salah satu jenis fluida non Newtonian adalah fluida mikrokutub. (Brujan, 2011; Imron dkk, 2013, Widodo dkk, 2016).

Secara teoritis, Fluida mikrokutub adalah fluida dengan struktur mikro yang terdiri dari partikel kaku yang berorientasi secara acak pada media kental yang memiliki kemampuan mikrorotasi. Teori tentang fluida mikrokutub pertama kali diperkenalkan oleh Eringen (1965). Dalam fluida mikrokutub, partikel kaku yang terkandung di dalam elemen volume kecil yang dapat memutar pusat volume dijelaskan oleh vektor mikrorotasi (Satya Narayana dkk. 2013; Uddin dan Kumar. 2013; Widodo dkk.2016). Dalam kehidupan sehari-hari, fluida yang termasuk golongan mikrokutub adalah cairan koloid, suspensi polimer, suspensi lumpur, dan cairan di pembuluh darah manusia dan hewan (Abdel-Rahman. 2009; Uddin dan Kumar. 2013).

Sesuatu yang menarik dari fluida mikrokutub ialah model dari mikrokutubnya dapat disimpulkan ke dalam persamaan Navier-Stokes, yang digunakan dalam fluida kental (viskos). Hal tersebut terjadi karena fluida mikrokutub memiliki sifat seperti fluida kental klasik yang menjauhi permukaan objeknya (Borelli dkk, 2012; Uddin dan Kumar 2013; Widodo dkk, 2015c; Widodo dkk, 2015d; Widodo dkk, 2016). Karena fakta tersebutlah, maka permasalahan lapisan batas aliran tak tunak di sekitar bola di fluida mikrokutub diteliti dalam penelitian ini.

Selain itu, peran dari fluida mikrokutub adalah mengurangi tarik ulur lokal yang berbeda dengan fluida Newtonian (Uddin dan Kumar 2013; Widodo dkk, 2015c; Widodo dkk, 2015d; Widodo dkk, 2016). Fluida mikrokutub memiliki mikrorotasi dan kecepatan yang lebih rendah dibandingkan dengan fluida Newtonian. Kecepatan aliran fluida dalam lapisan batas meningkat dibandingkan dengan jika tidak ada mikrorotasi pada lapisan batas (Abdel-Rahman, 2009). Representasi dari mikrorotasi dapat digolongkan menurut rasio antara komponen vektor mikrorotasi dan gesekan fluida yang biasanya dinotasikan dengan nilai n sebagai berikut :

1. Jika $n = 0$

Mikro elemen dekat permukaan objek tidak mampu untuk melakukan rotasi dan hal ini biasa disebut kekuatan konsentrasi dari mikro elemen (Abdel-Rahman, 2009; Das, 2012; Srinivasacharya dan Uppendar, 2013).

2. Jika $n = 0.5$

Bagian antisimetri tegangan tensor menghilang dan keadaan ini sering disebut sebagai kelemahan konsentrasi mikro elemen (Abdel-Rahman 2009; Das, 2012).

3. Jika $n = 1$

Model aliran turbulen dalam lapisan batas mikro rotasi dapat direpresentasikan dengan menggunakan nilai n adalah 1 (Das, 2012).

Ada beberapa penelitian yang dilakukan bertujuan untuk mengkaji aliran lapisan batas dalam fluida mikrokutub dengan menerapkan keseragaman medan magnet. Pada permasalahan aliran lapisan batas dalam fluida mikrokutub, peningkatan ketebalan momentum lapisan batas akan terjadi jika nilai-nilai parameter material juga meningkat (Abdel-Rahman, 2009; Widodo dkk, 2015c; Widodo dkk, 2015d; Widodo dkk, 2016).

Di samping itu, efek mikrokutub juga dapat meningkatkan kecepatan fluida (Abdel-Rahman, 2009; Widodo dkk, 2015c; Widodo dkk, 2015d; Widodo dkk, 2016) dan meningkatkan profil mikrorotasi pada lapisan batas (Abdel-Rahman, 2009; Widodo dkk, 2015d; Widodo dkk, 2016). Pada tahun 2009, Abdel-Rahman telah melakukan penelitian tentang kondisi lapisan batas dalam aliran fluida mikrokutub melalui beberapa bentuk obyek geometri. Hasil penelitian

tersebut menunjukkan bahwa kecepatan aliran fluida berkurang pada kasus bidang datar dan pada silinder vertikal pada waktu yang sama terjadi peningkatan kecepatan fluida, sebagai hasilnya parameter bahan meningkat. Peningkatan parameter bahan mungkin mengurangi kecepatan mikrorotasi dari fluida. Kecuali pada kasus aliran lapisan batas melalui ikatan di fluida mikrokutub dengan konsentrasi yang kecil, kecepatan mikrokutub akan meningkat bersamaan dengan parameter material yang juga meningkat pula.

Pada penelitian mengenai efek magnetohidrodinamik pada fluida mikrokutub, bilangan Reynolds magnetik diasumsikan sangat kecil jika dibandingkan dengan daerah bermagnet sehingga daerah terinduksi magnet dapat diabaikan (Abdel-Rahman, 2009; Hayat dkk, 2009; Satya Narayana dkk, 2013; Widodo dkk, 2015c; Widodo dkk, 2016). Asumsi ini juga banyak digunakan ketika meneliti tentang efek magnetohidrodinamik pada fluida kental sebagaimana yang telah dibahas sebelumnya. Dengan meningkatkan nilai dari parameter magnetik, ketebalan dari lapisan batas berkurang (Borrelli dkk, 2012). Selain itu, diasumsikan bahwa tidak ada tegangan yang dihasilkan di daerah penghantar listrik, (Satya Narayana dkk, 2013).

Magnet yang lebih kuat dapat menghasilkan kecepatan fluida yang lambat dikarenakan adanya daerah bermagnet yang menghasilkan gaya Lorentz yang memiliki kemampuan mengurangi kecepatan aliran fluida (Abdel-Rahman, 2009; Hayat dkk, 2009; Widodo dkk, 2015d; Widodo dkk, 2016). Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Hayat dkk (2009), pada konsentrasi yang lemah, kecepatan mikro rotasi berkurang ketika nilai parameter magnetik bertambah. Sedangkan pada konsentrasi tinggi, kecepatan mikro rotasi berkurang pada kasus daerah datar dan silinder vertikal tetapi terjadi peningkatan pada ikatan berpindah pada area magnetik (Hayat dkk, 2009; Widodo dkk, 2015c; Widodo dkk, 2015d; Widodo dkk, 2016).

Fluida mikrokutub dapat mempercepat perpindahan panas pada aliran lapisan batas dan magnetohidrodinamik. Dari hal tersebut, proses aliran panas (konveksi) yang terdapat pada fluida mikrokutub yang berada di bawah daerah magnetik dan daerah lapisan batas dibutuhkan dan telah diteliti oleh beberapa peneliti seperti Udin dan Kumar (2013), Satya Narayana dkk (2013) ; dan

Srinivasacharya dan Upendar (2013). Ketika berhubungan dengan gaya konveksi, peningkatan nilai parameter material dikalikan dengan kecepatan resultan dari fluida. Hal ini dikarenakan peningkatan parameter material dari mikrokutub fluida menghasilkan kecepatan pusaran partikel fluida (Uddin dan Kumar, 2013; Widodo dkk, 2015c; Widodo dkk, 2016).

2.6. Skema Keller-Box

Metode Keller-Box adalah salah satu teknik untuk menyelesaikan persamaan parabolik, terutama persamaan lapisan batas. Skema ini merupakan bentuk implisit dengan keakurasiannya orde kedua baik terhadap ruang maupun waktu yang mana step size untuk waktu dan ruang tidak harus sama. Hal ini membuat penyelesaian persamaan differensial parsial parabolic lebih efisien dan tepat. Penerapan metode Keller-Box ini dimulai dengan terlebih dahulu mengubah bentuk persamaan diferensial orde dua atau orde tinggi menjadi persamaan. Berikut adalah contoh mengubah persamaan diferensial orde dua menjadi orde satu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dengan mendefinisikan

$$v = \frac{\partial u}{\partial x}$$

sehingga bentuk persamaan ode kedua tersebut dapat dituliskan menjadi dua persamaan orde pertama sebagai berikut.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v$$

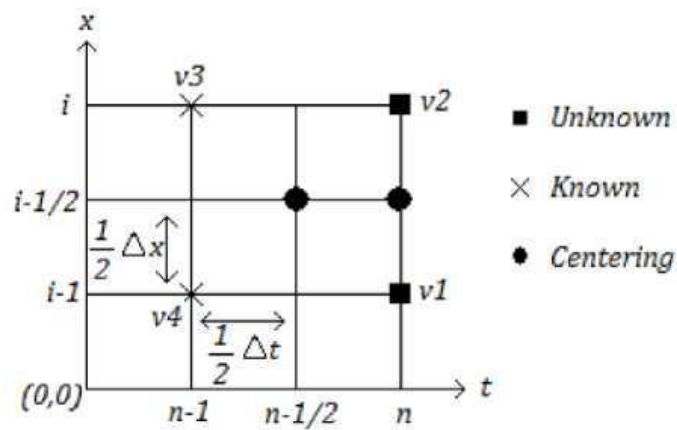
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial v}{\partial x}$$

Berdasarkan bentuk skema Keller-Box pada Gambar 2.1 untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu, yaitu sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x_i} &= v_{i-\frac{1}{2}}^n \\ 2 \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t_n} &= \frac{\alpha(v_i^n - v_{i-1}^n)}{\Delta x_i} + \frac{\alpha(v_i^{n-1} - v_{i-1}^{n-1})}{\Delta x_i} \end{aligned}$$

Pada langkah kedua dilakukan proses diskritisasi pada model matematika yang

diperoleh. Kemudian pada langkah ketiga dilakukan proses pelinieran persamaan-persamaan yang diperoleh dengan menggunakan metode Newton yang kemudian disajikan dalam bentuk matriks vektor. Pada langkah terakhir, hasil dari proses pelinieran diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal. Persamaan-persamaan dari hasil linierisasi di atas dapat diselesaikan dengan teknik eliminasi blok tridiagonal yang berupa matriks blok. Berikut ini merupakan skema Keller-box :



Gambar 2.2 Skema Keller-box (Al-Shibani dkk, 2012)

BAB III

METODE PENELITIAN

Secara detail, desain dan metode penelitian ini dapat diuraikan sebagai berikut:

3.1. Tahapan Penelitian

Tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Studi Literatur

Mengkaji model matematika aliran fluida tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida mikrokutub yang melalui suatu bola. Setiap model matematika mempunyai sifat dan karakteristik tertentu, sehingga untuk mengembangkan model matematika tersebut perlu dikaji terlebih dahulu agar mendapatkan model matematika yang sesuai dengan yang diharapkan.

2. Konstruksi Model Matematika

Proses konstruksi model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet adalah sebagai berikut :

- a. Penurunan persamaan konservasi massa dan hukum Newton II untuk mendapatkan persamaan pembangun dari model yang dikaji.
- b. Penjabaran dari persamaan pembangun dari model yang dikaji dalam bentuk vektor sehingga didapatkan persamaan pembangun berdimensi dari model yang dikaji.
- c. Penentuan kondisi batas dengan melakukan pengamatan terhadap aliran fluida yang melewati bola.
- d. Penyederhanaan pada persamaan pembangun yang berdimensi, kemudian melakukan proses transformasi ke dalam bentuk persamaan tak berdimensi dengan mensubstitusikan variabel-variabel yang tak berdimensi
- e. Penyederhanaan persamaan yang tak berdimensi dengan pendekatan lapisan batas.
- f. Perubahan persamaan yang tak berdimensi ke persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi alir (*stream function*) pada bola.

- g. Diperoleh persamaan similaritas dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet.
3. Implementasi dengan menggunakan skema Keller-Box.
Proses penyelesaian model matematika yang diperoleh dengan skema Keller-Box adalah sebagai berikut :
 - a. Persamaan similaritas dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet diubah ke persamaan berorde satu.
 - b. Proses diskritisasi dengan menggunakan beda hingga pusat.
 - c. Proses linierisasi persamaan yang diperoleh dengan menggunakan metode Newton dan dibentuk dalam matriks vektor.
 - d. Penyelesaian hasil linearisasi dilakukan dengan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal.
4. Membuat, *Running* Program, dan Validasi
Algoritma dari model yang diperoleh, diimplementasi dalam bentuk program dengan menggunakan program Matlab. Program yang telah dibuat dijalankan dengan memasukkan inputan dan dianalisa hasil luaran numeriknya. Tahap pembangunan model matematika dari aliran fluida tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida mikrokutub yang melalui suatu bola sampai pada hasil output program divalidasi kembali.
5. Simulasi
Dengan menggunakan program yang telah dibuat, dilakukan simulasi dengan menggunakan beberapa nilai pada parameter dan variabel inputan.
6. Analisis Hasil dan Pembahasan
Hasil yang diperoleh dari beberapa simulasi yang dilakukan akan dianalisis dan dibahas, untuk kemudian dicari solusi numerik terbaik dari aliran fluida tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida mikrokutub yang melalui suatu bola yang dalam hal ini adalah profil kecepatan dan profil mikrorotasi dari aliran fluida dan selanjutnya dibuat kesimpulan dari masalah yang dikaji.

7. Pembuatan Laporan
8. Diseminasi Hasil Penelitian

3.2.Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di laboratorium Pemodelan Matematika dan Simulasi Sistem, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

3.3.Jadwal Penelitian

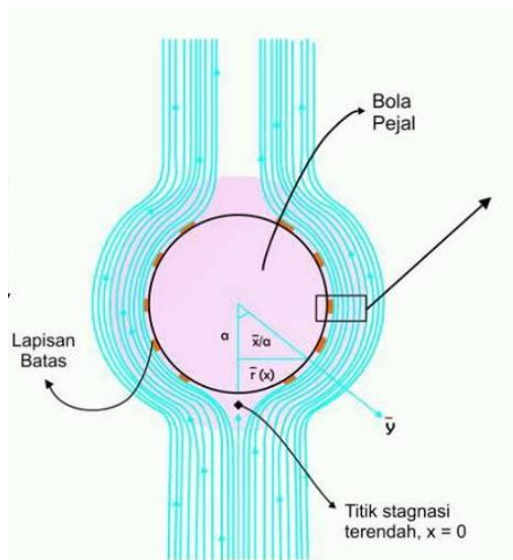
Kegiatan Penelitian	Bulan I				Bulan II				Bulan III				Bulan IV			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Studi Literatur																
Pembangunan Model																
Implementasi dengan menggunakan skema Keller-Box																
Membuat, <i>Running</i> Program, dan Verifikasi																
Simulasi																
Analisis hasil dan pembahasan																
Pembuatan laporan																
Diseminasi hasil penelitian																

BAB IV

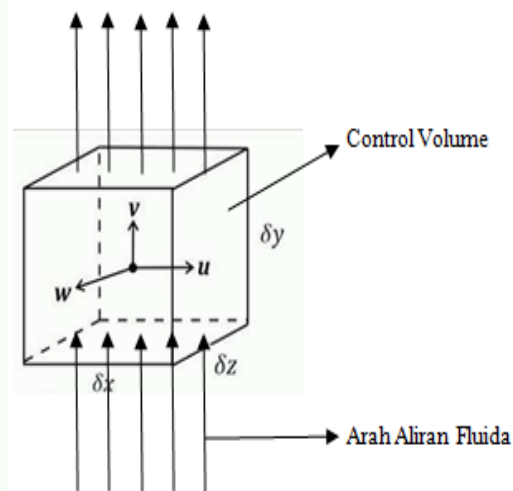
MODEL MATEMATIKA

Pada penelitian ini, fluida mikrokutub yang mengalir dari bawah, awalnya tidak mengandung magnet, namun setelah fluida mikrokutub tersebut melalui bola yang mengandung magnet, terjadi peristiwa induksi magnet, sehingga fluida yang awalnya tidak bermagnet, setelah melalui bola bermagnet menjadi bermuatan magnet. Pada bab ini dijelaskan dan diuraikan mengenai persamaan pembangun (*governing equation*) untuk membangun model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet. Dengan fokus penelitian pada titik stagnasi dari lapisan batas yang terbentuk dari aliran fluida yang bergerak secara vertikal dari bawah ke atas yang melalui bola yang bermuatan magnet, maka digunakan hukum konservasi massa dan hukum konservasi momentum. Dari kedua hukum konservasi tersebut dapat dibangun persamaan kontinuitas, persamaan momentum linier, dan persamaan momentum anguler.

Untuk mengkonstruksi dan menggambarkan lapisan batas berupa elemen-elemen kecil dan tipis yang terbentuk dari hasil gesekan antara fluida yang terinduksi magnet dengan permukaan bola bermagnet, maka dapat digambarkan dan dibuat Sistem Fisis dan *Control Volume* sebagai berikut :



Gambar 4.1. : Sistem Fisis



Gambar 4.2. : Aliran Fluida melalui Control Volume

4.1. Persamaan Pembangun

4.1.1. Persamaan Kontinuitas

Hukum konservasi massa didasarkan pada laju perubahan massa terhadap waktu yang terdapat pada sebuah sistem yakni nol atau jumlahan dari massa pada suatu sistem adalah konstan, dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{D m_{\Omega}}{Dt} = 0 \quad (4.1)$$

dimana $\frac{D ()}{Dt}$ adalah turunan material sedangkan m_{Ω} adalah massa dari sistem.

Sedangkan m_{Ω} adalah :

$$m_{\Omega} = \int_{\Omega} \rho \, dx \quad (4.2)$$

Persamaan m_{Ω} adalah massa dari suatu sistem yang merupakan jumlahan dari semua perkalian densitas (kerapatan) yang merupakan volume dari sistemnya. Menurut teorema *Reynolds Transport*, laju dari perubahan massa terhadap waktu pada sebuah sistem adalah :

$$\frac{D m_{\Omega}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \, dx + \int_{CS} \rho (\hat{n} \cdot \mathbf{u}) \, dS \quad (4.3)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \, dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \, dx + \int_{CS} \rho (\hat{n} \cdot \mathbf{u}) \, dS \quad (4.4)$$

dengan,

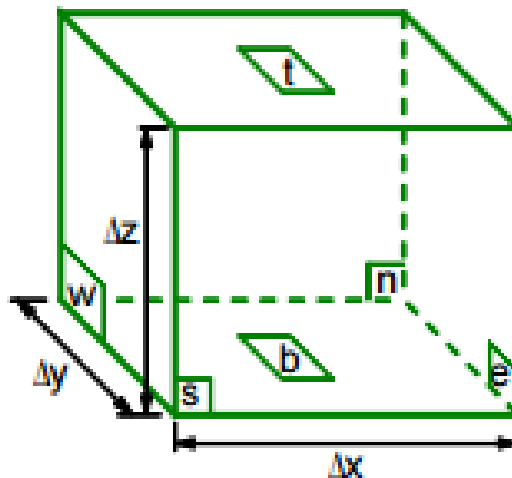
$\mathbf{u} = (u, v, 0)$ adalah komponen kecepatan fluida

\hat{n} = vektor normal terhadap elemen dS

Dengan melakukan substitusi persamaan (4.3) ke persamaan (4.1), maka diperoleh :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \, dx + \int_{CS} \rho \hat{n} \cdot \mathbf{u} \, dS = 0 \quad (4.5)$$

Dengan menggunakan pendekatan *Control volume* untuk menggambarkan elemen-elemen kecil pada sistem, maka dapat dikonstruksi persamaan kontinuitas sebagai berikut :



Sesuai Hukum Konservasi Massa yang berbunyi massa tidak diciptakan atau dihancurkan, sehingga:

laju perubahan massa dalam sel = fluks massa ke dalam fluks

Dengan arah fluks lebih konvensional (positif luar), dan indeks e, w, n, s, t, b yang berarti east, west, north, south, top, bottom maka :

$$\begin{aligned} \text{rate of change of mass in cell} + \text{net outward mass flux} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\text{mass}) + \sum_{\text{faces}}(\text{mass flux}) &= 0 \quad (4.6) \\ \frac{d(\rho V)}{dt} + (\rho u A)_e - (\rho u A)_w + (\rho v A)_n - (\rho v A)_s + (\rho w A)_t - (\rho w A)_b &= 0 \quad (4.7) \end{aligned}$$

Karena $V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ dan A adalah Luas, maka :

$$\frac{d(\rho \Delta x \Delta y \Delta z)}{dt} + ((\rho u)_e - (\rho u)_w) \Delta y \cdot \Delta z + ((\rho v)_n - (\rho v)_s) \Delta x \cdot \Delta z + ((\rho w)_t - (\rho w)_b) \Delta x \cdot \Delta y = 0 \quad (4.8)$$

Dengan membagi Persamaan (4.8) pada kedua ruasnya dengan $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, maka diperoleh :

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{((\rho u)_e - (\rho u)_w)}{\Delta x} + \frac{((\rho v)_n - (\rho v)_s)}{\Delta y} + \frac{((\rho w)_t - (\rho w)_b)}{\Delta z} = 0 \quad (4.9)$$

Karena limit dari $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ mendekati nol , maka :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4.10)$$

Persamaan (4.10) merupakan bentuk persamaan dalam dimensi 3, dan dapat pula dituliskan dalam bentuk dimensi 2 sebagai berikut :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (4.11)$$

Persamaan (4.11) dapat pula dituliskan dalam bentuk notasi vektor sebagai berikut :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (4.12)$$

dengan $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}$ dan $\mathbf{u}(u, v, 0)$ adalah vektor kecepatan dari fluida terhadap posisi.

Setelah diperoleh persamaan (4.6) maka dilakukan penurunan untuk mendapatkan persamaan kontinuitas dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikroktub di bawah pengaruh medan magnet sebagai berikut :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{u \partial \rho}{\partial x} + \frac{\rho \partial u}{\partial x} \right] + \left[\frac{v \partial \rho}{\partial y} + \frac{\rho \partial v}{\partial y} \right] = 0$$

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0$$

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0$$

Dengan menggunakan teorema pengangkutan Reynolds, maka diperoleh :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0 \quad (4.13)$$

Pada tesis ini fluida mikrokutub merupakan fluida yang *incompressible*, maka densitas (kerapatan) dari fluidanya sangat kecil dan tidak memberikan pengaruh yang signifikan, sehingga :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0$$

Atau dalam notasi vektor dituliskan sebagai berikut :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Berdasarkan penelitian ini, maka persamaan kontinuitas dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet adalah :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{r}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{r}\bar{v}) = 0 \quad (4.14)$$

4.1.2. Persamaan Momentum Linier

Persamaan Momentum Linier dibangun dari hukum Newton II. Dengan menggunakan pendekatan *Control volume* maka dapat dikonstruksi persamaan momentum linier sebagai berikut :

Rumus umum dari momentum linier adalah massa suatu benda dikalikan dengan kecepatan benda tersebut. Sedangkan hukum Newton II menyatakan bahwa besar momentum terhadap perubahan waktu sama dengan jumlahan dari gaya-gaya yang bekerja pada sistem tersebut. Hukum Newton II dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\omega} \rho \mathbf{u} dx = \Sigma F \quad (4.15)$$

dengan

ρ = kerapatan (densitas)

\mathbf{u} = vektor kecepatan

ΣF = jumlahan dari gaya-gaya yang bekerja pada sistem (*body force* dan *surface force*)

Dengan menggunakan teorema Reynolds *Transport* , laju dari perubahan momentum terhadap waktu adalah :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\omega} \rho \mathbf{u} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \mathbf{u} dx + \int_{CS} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \hat{n}) dS \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \mathbf{u} dx + \int_{CS} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \hat{n}) dS = \Sigma F \quad (4.17)$$

Persamaan (4.17) dapat pula dituliskan dalam bentuk notasi vektor, yaitu :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \right) = \Sigma F \quad (4.18)$$

Karena sifat konvergen dari $\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ dan $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, maka $\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, sehingga persamaan (4.18) menjadi :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \Sigma F \quad (4.19)$$

a. Penurunan persamaan (4.18) ruas kiri $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}, \bar{v})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right) \quad (4.20)$$

b. Penurunan persamaan (4.18) ruas kiri $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$:

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \left((\bar{u}, \bar{v}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \right) (\bar{u}, \bar{v})$$

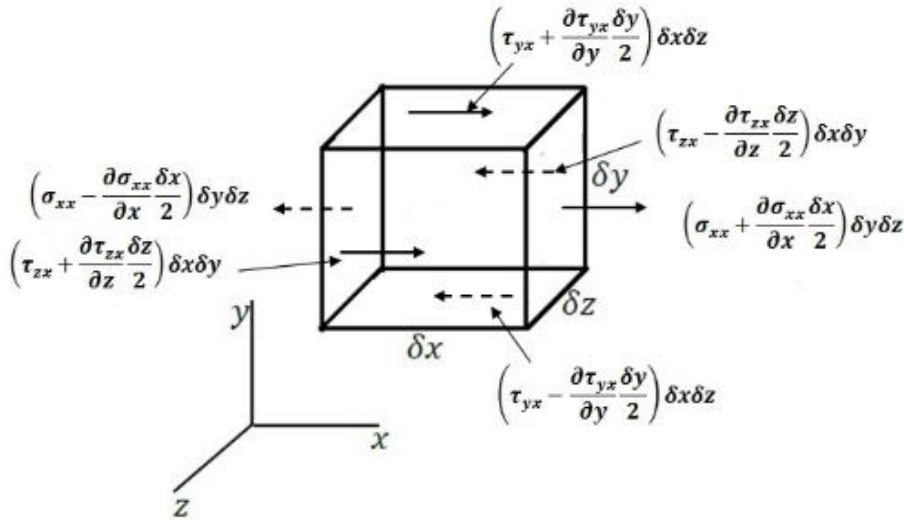
$$((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{v} \right) (\bar{u}, \bar{v})$$

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) i + \left(\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) j \quad (4.21)$$

$\sum F$ di ruas kanan terdiri dari beberapa gaya yaitu gaya permukaan, gaya angular, dan gaya magnetik. Berikut ini merupakan gaya-gaya yang terdapat pada sistem yaitu :

A. Gaya Permukaan

Gaya permukaan adalah gaya internal yang mempengaruhi atau bekerja pada fluida yang berupa tegangan-tegangan yang diantaranya terdapat tegangan normal (σ) dan tegangan geser (τ) yang dapat diperoleh dari *Control Surface* sebagai berikut :



Gambar 4.3 : Gaya-gaya Permukaan yang Bekerja pada Elemen Fluida

1. Gaya searah sumbu - X :

$$F_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \delta x \delta y \delta z$$

2. Gaya searah sumbu - Y :

$$F_{sy} = \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z$$

3. Resultan gaya permukaan :

$$\mathbf{F}_s = F_{sx} \mathbf{i} + F_{sy} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_s = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) \mathbf{j}$$

Karena telah diasumsikan bahwa penelitian ini adalah pada fluida mikroktub yang tak mampu mampat (*incompressible*) sehingga tegangan-tegangannya sebanding dengan laju deformasi :

1. Tegangan normal :

$$\sigma_{xx} = -p + 2(\mu + k) \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2(\mu + k) \frac{\partial v}{\partial y}$$

2. Tegangan geser

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = (\mu + k) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Turunan σ_{xx} terhadap x adalah :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-p + 2(\mu + k) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \frac{-\partial p}{\partial x} + 2(\mu + k) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Turunan σ_{yy} terhadap y adalah :

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-p + 2(\mu + k) \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \frac{-\partial p}{\partial y} + 2(\mu + k) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Turunan τ_{xy} terhadap x adalah :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left((\mu + k) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)$$

Turunan τ_{xy} terhadap y adalah :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + k) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

3. Resultan gaya permukaan

$$\mathbf{F}_s = \left(\frac{-\partial p}{\partial x} + 2(\mu + k) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) i +$$

$$\left(\frac{-\partial p}{\partial y} + 2(\mu + k) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right) j$$

Dari persamaan kontinuitas :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

Maka resultan gaya permukaan dapat dituliskan menjadi :

$$\mathbf{F}_s = \left(\frac{-\partial p}{\partial x} + (\mu + k) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mu + k) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) i +$$

$$\left(\frac{-\partial p}{\partial y} + (\mu + k) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\mu + k) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) j$$

$$\mathbf{F}_s = \left(\frac{-\partial p}{\partial x} i, \frac{-\partial p}{\partial y} j \right) + \left((\mu + k) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mu + k) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) +$$

$$\left((\mu + k) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\mu + k) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) j$$

$$\mathbf{F}_s = -\nabla \mathbf{p} + (\mu + k) \nabla^2 \mathbf{u}$$

Penurunan $\nabla \mathbf{p}$:

$$\nabla \mathbf{p} = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} i + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} j \right) p$$

$$\nabla \mathbf{p} = \left(\frac{\partial p}{\partial \bar{x}} i + \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} j \right)$$

Penurunan $(\mu + k) \nabla^2 \mathbf{u}$:

$$(\mu + k) \nabla^2 \cdot \mathbf{u} = (\mu + k) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \cdot (\bar{u}, \bar{v})$$

$$(\mu + k)\nabla^2.\mathbf{u} = (\mu + k)\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2}\right).(\bar{u}, \bar{v})$$

$$(\mu + k)\nabla^2.\mathbf{u} = (\mu + k)\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right)i + (\mu + k)\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right)j$$

dengan p adalah tekanan. Sedangkan $-\nabla p$, tanda negatif dipilih ketika $p > 0$ yang menunjukkan tekanan yang berasal dari luar fluida. Tekanan tersebut terjadi akibat pengaruh gaya yang diberikan terhadap permukaan dari fluida.

B. Gaya Angular

Gaya internal yang juga mempengaruhi sistem selain gaya permukaan adalah gaya angular. Terdapat gaya angular karena pada penelitian ini fluida yang digunakan adalah fluida mikrokutub yang memiliki kemampuan mikrorotasi. Sehingga Gaya angular yang berpengaruh pada sistem adalah sebagai berikut :

$$\mathbf{F}_a = \rho \mathbf{f} + k(\nabla \times \mathbf{N})$$

Untuk aliran fluida mikrokutub yang incompressible, maka koefisien materialnya bernilai konstan, sehingga $\mu > 0$ dan gaya $\mathbf{f} = 0$ (Kucaba-Pietal : 2004) , sehingga gaya angularnya menjadi :

$$\mathbf{F}_a = k(\nabla \times \mathbf{N})$$

C. Gaya Magnetik

Pada penelitian ini, geometri benda yang diteliti adalah bola pejal bermagnet. Fluida yang awalnya tidak bermagnet, mengalir melewati bola pejal bermagnet sehingga fluida yang awalnya tidak bermagnet, terinduksi magnet dari bola dan menjadi fluida bermagnet (Magnetohidrodinamik). Pada bola bermagnet yang diam hanya akan menghasilkan medan listrik (\mathbf{E}), tetapi pada muatan yang bergerak dalam hal ini fluida yang sudah terinduksi magnet selain menghasilkan medan listrik (\mathbf{E}) juga akan menghasilkan medan magnet, \mathbf{B} (Wiyanto : 2008). Dalam hal ini medan magnet yang dimiliki fluida yang terinduksi magnet dari bola dinotasikan (\mathbf{b}) .

Sebuah muatan σ yang bergerak dengan kecepatan u di dalam medan magnet \mathbf{B} , maka gaya magnetik total yang bekerja pada muatan σ yang bergerak di dalam daerah tersebut biasa dikenal dengan Gaya Lorentz : $\mathbf{F}_{magnetik} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$

Dimana \mathbf{J} adalah kerapatan arus listrik dan \mathbf{B} adalah total medan magnet yang terjadi dalam sistem. Sedangkan menurut hukum Ohm, bahwa kerapatan arus listrik diberikan :

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

Karena $\mathbf{B} = \mathbf{b} + \mathbf{B}_0$, dimana \mathbf{B} adalah medan magnet total , \mathbf{B}_0 adalah medan magnet dari bola yang mengandung magnet, dan \mathbf{b} adalah besarnya medan magnet dari fluida yang terinduksi oleh bola bermagnet.

Di dalam bahan konduktor, satu atau lebih elektron dari setiap atom bebas bergerak di dalam bahan. Di dalam konduktor cair yang bebas bergerak di dalam cairan adalah ion-ion. Salah satu sifat konduktor adalah tidak ada medan listrik di dalam konduktor sehingga ($\mathbf{E}=0$), sehingga persamaan di atas menjadi :

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{F}_{magnetik} = \{ \sigma (\mathbf{u} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0)) \} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0)$$

$$\mathbf{F}_{magnetik} = \{ \sigma (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0)$$

dengan,

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{b}) = (vb)i - (ub)j + 0k$$

Secara analog diperoleh bahwa :

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) = (vB_0)i - (uB_0)j + 0k$$

Sehingga

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) = (v(b + B_0))i + (-u(b + B_0))j + 0k$$

Jadi,

$$\{(\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0)\} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v(b + B_0)u & -u(b + B_0) & 0 \\ 0 & 0 & (b + B_0) \end{vmatrix}$$

$$\{(\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0)\} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0) = (-u(b^2 + 2bB_0 + B_0^2))i - (v(b^2 + 2bB_0 + B_0^2))j + 0k$$

$$\{(\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0)\} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0) = (-u(b + B_0)^2)i - (v(b + B_0)^2)j + 0k$$

$$\{(\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0)\} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0) = (-u(b + B_0)^2, -v(b + B_0)^2, 0)$$

$$\mathbf{F}_{magnetik} = \sigma(-u(b + B_0)^2, -v(b + B_0)^2, 0)$$

Persamaan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk vektor sebagai berikut :

$$\mathbf{F}_{magnetik} = \sigma(b + B_0)^2 \bar{\mathbf{u}}$$

Kemudian dengan mengelompokkan vektor i untuk sumbu $-x$, maka diperoleh persamaan momentum linier sumbu $-x$ sebagai berikut :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + k \frac{\partial \bar{N}}{\partial y} - \sigma(b + B_0)^2 \bar{u} \quad (4.22)$$

dan dengan mengelompokkan vektor j untuk sumbu $-y$, maka diperoleh persamaan momentum linier sumbu $-y$ sebagai berikut :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) - k \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} - \sigma(b + B_0)^2 \bar{v} \quad (4.23)$$

4.1.3. Persamaan Momentum Angular

Persamaan momentum angular dimiliki oleh sebuah obyek karena kemampuannya yang dapat melakukan gerak rotasi. Pada penelitian ini, karena menggunakan fluida mikrotub yang memiliki kemampuan gerak mikrorotasi yang dapat mempengaruhi aliran dari fluida dan fluida tipe ini juga terbentuk dari struktur mikro yang partikel-partikel didalamnya dapat berorientasi secara acak pada media kental, sehingga fluida ini juga memiliki momentum angular yang

terbentuk dari prinsip-prinsip hukum Newton II dan momentum linier sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{u} dx = \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{f} dx + \int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{t}_n dS \quad (4.24)$$

Pada persamaan (4.24) dapat diasumsikan kedalam persamaan momentum angular sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dx = \int_{\Omega(t)} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) dx + \int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n dS \quad (4.25)$$

dengan Teorema Green yaitu :

$$\int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n dS = \int_{\Omega(t)} (\mathbf{x} \times (\nabla \cdot \mathbf{T}) + \mathbf{T}_x) dx \quad (4.26)$$

$\nabla \cdot \mathbf{T}$ adalah bentuk penulisan lain dari $\text{div } \mathbf{T}$, dan \mathbf{T}_x adalah vektor $\mathbf{e}_{ijk} \mathbf{T}_{jk}$, dimana \mathbf{e}_{ijk} adalah *alternating tensor Levi-Civita*, sehingga diperoleh :

$$\int_{\Omega(t)} \mathbf{x} \times \left(\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{T} \right) dx = \int_{\Omega(t)} \mathbf{T}_x dx$$

Pada fluida mikrokutub ini diberikan *body torque* (\mathbf{g}) per satuan massa yang ditambahkan pada tekanan (\mathbf{f}), dan pasangan tekanan (\mathbf{c}_n) yang juga ditambahkan pada tekanan normal (\mathbf{t}_n). Sehingga keseimbangan dari momentum angular total adalah :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho (\mathbf{l} + \mathbf{x} \times \mathbf{u}) dx &= \int_{\Omega(t)} \rho (\mathbf{g} + \mathbf{x} \times \mathbf{f}) dx + \\ &\int_{\partial\Omega(t)} (\mathbf{c}_n + \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n) dS \end{aligned} \quad (4.27)$$

\mathbf{t}_n dapat pula dinyatakan ke dalam bentuk $\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}$, begitu pula dengan \mathbf{c}_n yang dapat pula dinyatakan ke dalam bentuk $\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{C}$. ($\mathbf{C} = \text{couple stress tensor}$). Sehingga :

$$\rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{l} + \mathbf{x} \times \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} + \rho \mathbf{x} \times \mathbf{f} + \nabla \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{T} + \mathbf{C}) \quad (4.28)$$

Dengan mengasumsikan bahwa momentum angular internal dituliskan dengan notasi vektor komponen $\mathbf{l}_i = (i = 1,2,3)$ dan $\mathbf{l}_i = \mathbf{I}_{ik} \boldsymbol{\omega}_k$,

I adalah koefisien mikro inersia dan fluida yang merupakan fluida mikrokutub yang isotropik serta $\mathbf{I}_{ik} = I \delta_{ik}$, maka persamaan dilakukan reduksi menjadi :

$$\rho I \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{C} + \mathbf{T}_x \quad (4.29)$$

dengan teorema pengangkutan Reynolds :

$$\rho I \frac{D\omega}{Dt} = \rho I \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \omega) \right)$$

Maka persamaan (4.29) menjadi :

$$\rho I \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \omega) \right) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{C} + \mathbf{T}_x \quad (4.30)$$

Fluida mikrokutub didefinisikan sebagai fluida isotropik dengan *couple stress tensor* \mathbf{C} dan \mathbf{T}_x

$$\mathbf{C}_{ij} = \alpha \omega_{k,k} \delta_{ij} + \beta \omega_{i,j} + \gamma \omega_{j,i} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{T}_x = \mathbf{e}_{ijk} \mathbf{T}_{jk} = 2k \mathbf{e}_{ikm} \mathbf{u}_{m,k} - 2k \omega_i \quad (4.32)$$

Persamaan (4.31) dan (4.32) dapat dinyatakan kedalam notasi vektor Gibbsi sebagai berikut :

$$\nabla \mathbf{C} = (\alpha + \beta) \nabla^2 \omega + \gamma \nabla^2 \cdot \omega$$

$$\nabla \mathbf{C} = (\alpha + \beta) \nabla^2 \omega + \gamma \nabla^2 \omega - \gamma \nabla \times (\nabla \times \omega)$$

$$\nabla \mathbf{C} = (\alpha + \beta + \gamma) \nabla \nabla \cdot \omega - \gamma \nabla \times (\nabla \times \omega)$$

$$\nabla \mathbf{C} = -\gamma \nabla \times (\nabla \times \omega)$$

dan

$$\mathbf{T}_x = k \nabla \times \mathbf{u} - 2k \omega$$

dengan melakukan substitusi tensor \mathbf{C} dan \mathbf{T}_x , serta $\omega = N$, maka diperoleh :

$$\rho I \left(\frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot N) \right) = -\gamma \nabla \times (\nabla \times N) + k(-2N + \nabla \times \mathbf{u}) \quad (4.33)$$

dengan :

N = Daerah mikrorotasi $(0,0,\bar{N})$

K = Kekentalan (viskositas) vortex

I = Densitas mikro inersia

γ = Gradien kekentalan (viskositas)

Dari Persamaan (4.3) dapat dituliskan :

$$\rho I \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = \gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k \left(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (4.34)$$

yang merupakan persamaan momentum anguler dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikroktub di bawah pengaruh medan magnet.

Pada penelitian ini digunakan kondisi batas saat $\bar{t} < 0$ yang berarti bahwa sebelum dilakukan pengamatan sebagai berikut :

$$\begin{cases} \bar{t} < 0 : \bar{u} = \bar{v} = \bar{N} \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y} \\ \bar{t} \geq 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{N} = -n \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \text{ pada } \bar{y} = 0 \\ \bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{N} = 0 \text{ pada } \bar{y} \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.35)$$

4.2. Transformasi Variabel Tak Berdimensi

Dari persamaan persamaan pembangunan yang didapatkan dalam bentuk berdimensi, selanjutnya akan dilakukan proses transformasi persamaan pembangunan, dari yang berdimensi ke bentuk non dimensional. Menurut Ali (2010), variabel-variabel tak berdimensi yang digunakan sehingga persamaan-persamaan berdimensi setelah ditransformasikan menjadi tak berdimensi adalah :

$$x = \frac{\bar{x}}{a}, y = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{y}}{a}, t = \frac{U_{\infty} \bar{t}}{a}, u = \frac{\bar{u}}{U_{\infty}}, v = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}}{U_{\infty}}, p = \frac{\bar{p}}{\rho U_{\infty}^2},$$

$$r(x) = \frac{\bar{r}(\bar{x})}{a}, N = Re^{-1/2} \frac{a \bar{N}}{U_{\infty}}$$

Re adalah bilangan Reynolds, dimana $Re = \frac{U_{\infty} \bar{a}}{\nu}$ dan ν adalah viskositas kinematis yang merupakan perbandingan antara viskositas dinamis dengan densitas yang dapat dinyatakan sebagai $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Kemudian dilakukan proses substitusi variabel-variabel tak berdimensi di atas ke dalam persamaan pembangunan yang telah didapatkan dan dengan mendefinisikan $M = \frac{a \sigma B_0^2}{\rho U_{\infty}}$ serta $K = \frac{k}{\mu}$ kemudian dengan mengasumsikan bahwa medan magnet menginduksi fluida yang mengalir melalui bola bermagnet besarnya adalah $\frac{1}{4}$ dari besar medan magnet dari sumber yang dalam hal ini adalah bola bermagnet. sehingga diperoleh :

Persamaan Kontinuitas :

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (4.36)$$

Persamaan momentum sumbu - x :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(1+K)}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$K \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{25}{16} Mu \quad (4.37)$$

Persamaan momentum sumbu - y :

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1+K}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+K}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{K}{Re^2} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{25}{16} \frac{M}{Re} v \quad (4.38)$$

Persamaan momentum angular :

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) = \left(1 + \frac{K}{2} \right) \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4.39)$$

Berdasarkan variabel-variabel tak berdimensi di atas, maka kondisi awal dan kondisi batas diberikan :

$$\begin{cases} t < 0 : u = v = N \text{ untuk setiap } x, y \\ t \geq 0 : u = v = 0, N = -n \frac{\partial u}{\partial y} \text{ pada } y = 0 \\ u = u_e(x), N = 0 \text{ pada } y \rightarrow \infty \end{cases}$$

4.3. Pendekatan Lapisan Batas

Pendekatan lapisan batas digunakan karena lapisan batas yang terbentuk dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet adalah sebuah lapisan yang sangat tipis yang mana bilangan Reynoldsnnya mendekati tak hingga ($Re \rightarrow \infty$), sehingga $\frac{1}{Re} \rightarrow 0$. Dari hal tersebut, maka akan berpengaruh pada beberapa persamaan yang terbentuk di bab 4.2 dan akan menjadi persamaan sebagai berikut :

1. Persamaan Kontinuitas :

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (4.40)$$

2. Persamaan Momentum Sumbu - x :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + (1+K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{25}{16} Mu \quad (4.41)$$

3. Persamaan Momentum Sumbu - y :

$$- \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.42)$$

4. Persamaan Momentum Angular :

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y}\right) = \left(1 + \frac{K}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right) - K \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (4.43)$$

Dengan menggunakan pendekatan lapisan batas maka diperoleh persamaan baru (4.40), (4.41), (4.42), dan (4.43). Pada persamaan momentum sumbu $-x$ (persamaan 4.41), tekanan tidak memberikan pengaruh pada kecepatan searah sumbu $-x$. Dengan demikian persamaan momentum linier yang ada pada sistem menjadi hanya persamaan momentum pada sumbu $-x$ saja. Sehingga pada persamaan momentum untuk aliran bebas pada fluida yang mengalir melewati bola bermagnet adalah :

$$\left(\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{25}{16} M u_e \quad (4.44)$$

Pada kecepatan aliran bebas dimana $u_e = \frac{3}{2} \sin x$, maka diperoleh :

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0, \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0, \text{ dan } \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (4.45)$$

Dari persamaan (4.45) kemudian dilakukan substitusi ke persamaan (4.44), sehingga diperoleh :

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{25}{16} M u_e$$

Dapat pula dituliskan sebagai berikut :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{25}{16} M u_e \quad (4.46)$$

Persamaan (4.45) disubstitusikan ke Persamaan (4.41), maka didapatkan persamaan baru sebagai berikut :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + M u_e + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{25}{16} M u$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{25}{16} M (u - u_e) \quad (4.47)$$

4.4. Fungsi Alir (*Stream Function*)

Berdasarkan banyaknya variabel yang digunakan pada persamaan-persamaan dari sistem magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet, maka dilakukan penyederhanaan. Penyederhanaan juga bertujuan untuk mempermudah proses komputasi, karena itulah diperkenalkan fungsi alir (*stream function*). Pada penelitian ini aliran fluida mikrokutub yang melewati bola bermagnet adalah aliran dua dimensi yang melewati sumbu $-x$ dan sumbu $-y$, maka terdapat komponen kecepatan

u yang searah sumbu $-x$ dan komponen kecepatan v yang searah sumbu $-y$, sehingga fungsi alir dari komponen u dan v adalah sebagai berikut :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.48)$$

Persamaan (4.47) yang diperoleh kemudian disubstitusikan ke persamaan (4.40), (4.46), dan (4.43), maka diperoleh :

1. Persamaan Kontinuitas :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-r \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4.49)$$

2. Persamaan Momentum Linier :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - \\ \frac{25}{16} M(u - u_e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right) &= \\ u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{25}{16} M \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - u_e \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} + \\ K \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{25}{16} M \left(u_e - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

3. Persamaan Momentum Angular :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= \left(1 + \frac{K}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial N}{\partial t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \frac{\partial N}{\partial x} + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= \left(1 + \frac{K}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - \end{aligned}$$

$$K \left(2N + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right)$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} \right) = \left(1 + \frac{K}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left(2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right)$$

(4.51)

4.5. Persamaan Similaritas

Pada persamaan similaritas ini, akan diubah persamaan pada fungsi alir ke dalam variabel-variabel similaritas. Persamaan momentum linier dan persamaan momentum angular yang pada fungsi alir ditransformasikan kedalam variabel similaritas yang terdiri dari 2 tipe waktu yaitu untuk waktu kecil (*Small Time*) dan waktu besar (*Large Time*).

Untuk waktu kecil (*Small Time*) dimana $t \leq t^*$ dengan sebarang nilai t menurut Mohammad (2010), diberikan persamaan sebagai berikut :

$$\Psi = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)$$

dengan ,

$$\eta = \frac{y}{t^{1/2}}$$

$$N = t^{-\frac{1}{2}} u_e(x) h(x, \eta, t) \quad (4.52)$$

Selanjutnya dilakukan substitusi pada persamaan tersebut di atas ke persamaan momentum linier yang dimiliki, maka diperoleh :

$$(1 + K) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta \partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + K \frac{\partial h}{\partial \eta} + t \frac{du_e}{dx} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] +$$

$$\frac{25}{16} M t \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^3 f}{\partial \eta \partial t} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \quad (4.53)$$

Selain itu momentum angular yang diperoleh dari hasil substitusi Persamaan (4.53) adalah :

$$\left(1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{\eta \partial h}{2 \partial \eta} + \frac{1}{2} h + t \frac{du_e}{dx} \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial h}{\partial t} +$$

$$t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} f \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + t K \left(2h + \frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2} \right) \quad (4.54)$$

Sedangkan untuk variabel similaritas pada waktu besar (*Large Time*) adalah sebagai berikut :

$$\Psi = u_e(x) r(x) F(x, Y, t)$$

dengan ,

$$Y = y$$

$$N = u_e(x) H(x, Y, t) \quad (4.55)$$

dengan melakukan substitusi pada persamaan (4.55) di atas ke persamaan momentum linier yang dimiliki, maka diperoleh :

$$(1 + K) \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{du_e}{dx} \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] + K \frac{\partial H}{\partial Y} + t + \frac{25}{16} M \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} + u_e \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) \quad (4.56)$$

Selain itu momentum angular yang diperoleh dari hasil substitusi Persamaan (4.55) adalah :

$$\left(1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} + \frac{du_e}{dx} \left(F \frac{\partial H}{\partial Y} - H \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \frac{\partial H}{\partial t} + u_e \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial Y} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} F \frac{\partial H}{\partial Y} \right) + K \left(2H + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) \quad (4.57)$$

Pada penelitian ini, fokus penelitian adalah di sekeliling bola bermagnet, dengan $\frac{du_e}{dx} = \frac{3}{2}$ dan $u_e = 0$ sehingga Persamaan momentum linier (Persamaan 4.53) dan momentum angular (Persamaan 4.54) pada waktu kecil (*Small Time*) adalah :

$$(1 + K) \frac{\partial^3 t}{\partial \eta^3} + \frac{\eta \partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + K \frac{\partial h}{\partial \eta} + t \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] + \frac{25}{16} M t \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} \quad (4.58)$$

$$\left(1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{\eta \partial h}{2 \partial \eta} + \frac{1}{2} h + t \frac{3}{2} \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial h}{\partial t} + t K \left(2h + \frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2} \right) \quad (4.59)$$

dengan kondisi batas sebagai berikut :

$$t < 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = h = 0 \text{ untuk setiap } x, \eta \quad (4.60)$$

$$t \geq 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, h = -n \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \text{ pada } \eta = 0 \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, h = 0 \text{ pada } y \rightarrow \infty \quad (4.62)$$

Sedangkan untuk waktu yang besar (*Large Time*), persamaan momentum linier dan persamaan momentum angularnya adalah :

$$(1 + K) \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] + K \frac{\partial H}{\partial Y} + \frac{25}{16} M \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} \quad (4.63)$$

$$\left(1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} + \frac{3}{2} \left(F \frac{\partial H}{\partial Y} - H \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \frac{\partial H}{\partial t} + K \left(2H + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) \quad (4.64)$$

dengan kondisi batas sebagai berikut :

$$F = \frac{\partial F}{\partial Y} = H = -n \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} 0 \text{ pada } Y = 0 \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = 1, H = 0 \text{ pada } Y \rightarrow \infty \quad (4.66)$$

Pada Persamaan (4.58) dan Persamaan (4.59) dengan tanda (') menunjukkan turunan terhadap η dapat pula dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut :

$$(1 + K)f''' + \frac{\eta}{2}f'' + Kh' + \frac{3}{2}t[1 - (f')^2 + ff''] + \frac{25}{16}Mt(1 - f') = t \frac{\partial f'}{\partial t} \quad (4.67)$$

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right)h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{1}{2}h + \frac{3}{2}t(fh' - hf') = t \frac{\partial h}{\partial t} + tK(2h + f'') \quad (4.68)$$

Pada Persamaan (4.63) dan Persamaan (4.64) dengan tanda (') menunjukkan turunan terhadap Y dapat pula dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut :

$$(1 + K)F''' + KH' + \frac{3}{2}[1 - (F')^2 + FF''] + \frac{25}{16}M(1 - F') = \frac{\partial F'}{\partial t} \quad (4.68)$$

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right)H'' + \frac{3}{2}(FH' - HF') = \frac{\partial H}{\partial t} + K(2H + F'') \quad (4.69)$$

$$\text{dengan } \frac{\partial F}{\partial \eta} = F' \text{ dan } \frac{\partial H}{\partial \eta} = H'$$

Kondisi awal untuk masing-masing fungsi f, f', f'' dan h, h' diperoleh dengan cara melakukan substitusi $t = 0$ pada sistem Persamaan (4.68), kemudian diselesaikan dengan kondisi batas, sehingga diperoleh sebagai berikut :

$$f = \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1 + K(1 - n))}} \right) + 2\sqrt{\frac{(1 + K(1 - n))}{\pi}} \left(e^{-\frac{\eta^2}{4(1 + K(1 - n))}} - 1 \right)$$

$$f' = \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1 + K(1 - n))}} \right)$$

$$f'' = \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + K(1 - n))}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1 + K(1 - n))}}$$

Dengan menggunakan $h = -nf''$ sebagai kondisi batas, maka diperoleh :

$$h = \frac{-n\eta}{2(1 + K(1 - n))\sqrt{\pi(1 + K(1 - n))}} e^{\frac{-\eta^2}{4(1 + K(1 - n))}}$$

$$h' = \frac{n}{\sqrt{\pi(1 + K(1 - n))}} e^{\frac{-\eta^2}{4(1 + K(1 - n))}}$$

BAB V

PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA

Pada Bab ini akan dibahas penyelesaian dan simulasi numerik dari model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet yang telah diperoleh pada Bab IV. Penyelesaian yang digunakan untuk model matematika yang diperoleh adalah dengan menggunakan metode Keller-Box. Metode Keller-Box adalah metode yang tepat dan efisien untuk penyelesaian persamaan-persamaan magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet karena persamaan-persamaan dari sistem tersebut merupakan persamaan diferensial parsial parabolik. Langkah-langkah penyelesaian numerik persamaan-persamaan pada sistem tersebut adalah sebagai berikut :

1. Persamaan-persamaan pada sistem yang merupakan orde tinggi dibentuk menjadi persamaan-persamaan orde pertama.
2. Dilakukan proses diskritisasi dengan menggunakan metode beda hingga pusat.
3. Dilakukan proses pelinieran persamaan-persamaan yang diperoleh dengan menggunakan metode Newton yang kemudian disajikan dalam bentuk matriks vektor.
4. Hasil dari proses pelinieran diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal.

5.1. Langkah-langkah Metode Keller-Box

Pada langkah pertama, dilakukan proses merubah persamaan-persamaan orde tinggi menjadi persamaan-persamaan orde pertama dan melakukan permisalan fungsi sebagai berikut :

1. Waktu Kecil (*Small Time*)

$$f' = u \quad (5.1)$$

$$u' = v \quad (5.2)$$

$$h' = q \quad (5.3)$$

dengan memisalkan Persamaan (5.1), (5.2), (5.3) ke Persamaan (4.67) dan (4.68), maka diperoleh :

$$(1 + K)v' + \frac{\eta}{2}v + Kq + \frac{3}{2}t[1 - u^2 + fv] + \frac{25}{16}Mt(1 - u) = t \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.4)$$

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right) q' + \frac{\eta}{2} q + \frac{1}{2} h + \frac{3}{2} t(fq - hu) = t \frac{\partial h}{\partial t} + tK(2h + v) \quad (5.5)$$

2. Waktu Besar (*Large Time*)

$$F' = U \quad (5.6)$$

$$U' = V \quad (5.7)$$

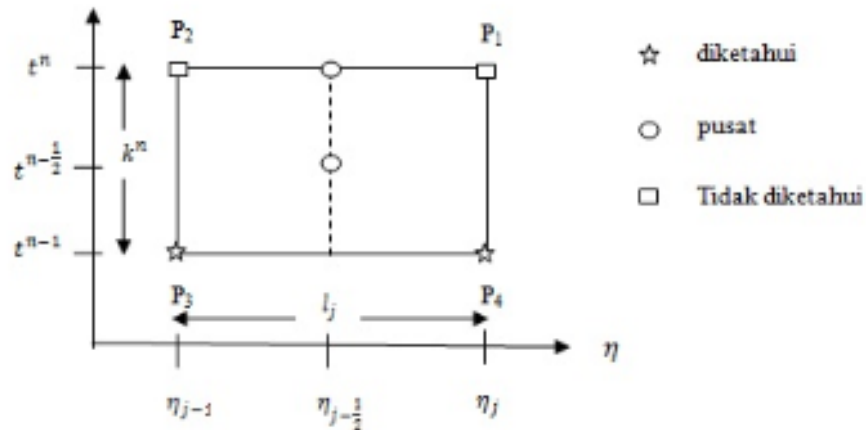
$$H' = Q \quad (5.8)$$

dengan memisalkan Persamaan (5.6), (5.7), (5.8) ke Persamaan (4.67) dan (4.68), maka diperoleh :

$$(1 + K)V' + KQ + \frac{3}{2}[1 - U^2 + FV] + \frac{25}{16}M(1 - U) = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (5.9)$$

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right) Q' + \frac{3}{2}(FQ - HU) = \frac{\partial H}{\partial t} + K(2H + V) \quad (5.10)$$

Pada langkah kedua dilakukan proses diskritisasi pada model matematika yang diperoleh pada waktu kecil (*Small Time*) dan pada waktu besar (*Large Time*). Pada Persamaan (5.1) – (5.3) dan Persamaan (5.6) – (5.8) menggunakan titik pusat atau titik tengah $\left(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n\right)$ pada ruas P_1P_2 dengan beda hingga pusat. Sedangkan untuk persamaan-persamaan yang tak linier seperti Persamaan (5.4) – (5.5) dan Persamaan (5.9) – (5.10) digunakan titik pusat atau titik tengah $\left(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}}\right)$ pada segi empat $P_1P_2P_3P_4$. Untuk lebih memahami pernyataan di atas lihat gambar di bawah ini :



Gambar 5.1 : Gambar Stensil Beda Hingga

1. Diskritisasi Waktu Kecil (*Small Time*)

$$\frac{(f_j^n - f_{j-1}^n)}{l_j} = u_{j-\frac{1}{2}}^n \rightarrow \frac{1}{l_j} (f_j^n - f_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (5.11)$$

$$\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{l_j} = v_{j-\frac{1}{2}}^n \rightarrow \frac{1}{l_j} (u_j^n - u_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (v_j^n - v_{j-1}^n) \quad (5.12)$$

$$\frac{(h_j^n - h_{j-1}^n)}{l_j} = q_{j-\frac{1}{2}}^n \rightarrow \frac{1}{l_j} (h_j^n - h_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (q_j^n - q_{j-1}^n) \quad (5.13)$$

Untuk persamaan momentum linier (5.4) adalah sebagai berikut :

$$\frac{1}{2} \left[(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = t^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{u_{j-\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right]$$

dengan

$$(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n = \left[(1+K)v' + \frac{\eta}{2}v + Kq + \frac{3}{2}t(1-u^2 + fv) + \frac{25}{16}Mt(1-u) \right]_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n = (1+K) \frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (v_{j-\frac{1}{2}}^n) + K (q_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{3}{2}t^n \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{25}{16}Mt^n (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

dan,

$$(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = \left[(1+K)v' + \frac{\eta}{2}v + Kq + \frac{3}{2}t(1-u^2 + fv) + \frac{25}{16}Mt(1-u) \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

$$(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = (1+K) \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + K (q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + \frac{3}{2}t^{n-1} \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \frac{25}{16}Mt^{n-1} (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})$$

Sehingga diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & (1+K) \frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (v_{j-\frac{1}{2}}^n) + K (q_{j-\frac{1}{2}}^n) + \\ & \frac{3}{2}t^n \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{25}{16}Mt^n (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) \\ & + (1+K) \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + K (q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + \\ & \frac{3}{2}t^{n-1} \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \frac{25}{16}Mt^{n-1} (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \end{aligned}$$

$$= 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

dan dapat ditulis dengan

$$\begin{aligned} & (1+K) \frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (v_{j-\frac{1}{2}}^n) + K (q_{j-\frac{1}{2}}^n) + \\ & \frac{3}{2} t^n \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{25}{16} M t^n \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \\ & 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n = -(1+K) \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - K (q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - \\ & \frac{3}{2} t^{n-1} \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \frac{25}{16} M t^{n-1} \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Untuk persamaan momentum angular (5.5) adalah sebagai berikut :

$$\frac{1}{2} \left[(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = t^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{h_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right]$$

dengan

$$(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n = \left[\left(1 + \frac{K}{2} \right) q' + \frac{\eta}{2} q + \frac{1}{2} h + \frac{3}{2} t (f q - h u) - t K (2h + v) \right]_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$\begin{aligned} (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left(1 + \frac{K}{2} \right) \frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (q_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n + \\ & \frac{3}{2} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \end{aligned}$$

dan

$$(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = \left[\left(1 + \frac{K}{2} \right) q' + \frac{\eta}{2} q + \frac{1}{2} h + \frac{3}{2} t (f q - h u) - t K (2h + v) \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

$$\begin{aligned} (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left(1 + \frac{K}{2} \right) \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \\ & \frac{3}{2} t^{n-1} \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + t^{n-1} K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{K}{2} \right) \frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (q_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n + \\ & \frac{3}{2} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \\
& \frac{3}{2} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
& = 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
& \text{dan dapat ditulis dengan} \\
& \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (q_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n + \\
& \frac{3}{2} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& = - \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \\
& \frac{3}{2} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (5.15)
\end{aligned}$$

2. Diskritisasi Waktu Besar (*Large Time*)

$$\frac{(F_j^n - F_{j-1}^n)}{l_j} = U_{j-\frac{1}{2}}^n \rightarrow \frac{1}{l_j} (F_j^n - F_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (U_j^n - U_{j-1}^n) \quad (5.16)$$

$$\frac{(U_j^n - U_{j-1}^n)}{l_j} = V_{j-\frac{1}{2}}^n \rightarrow \frac{1}{l_j} (U_j^n - U_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (V_j^n - V_{j-1}^n) \quad (5.17)$$

$$\frac{(H_j^n - H_{j-1}^n)}{l_j} = Q_{j-\frac{1}{2}}^n \rightarrow \frac{1}{l_j} (H_j^n - H_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (Q_j^n - Q_{j-1}^n) \quad (5.18)$$

Untuk persamaan momentum linier (5.9) adalah sebagai berikut :

$$(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n = \left[(1 + K)V' + KQ + \frac{3}{2}(1 - U^2 + FV) + \frac{25}{16}M(1 - U) \right]_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$\begin{aligned}
(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n &= (1 + K) \frac{(V_j^n - V_{j-1}^n)}{l_j} + K \left(Q_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \\
& \frac{3}{2} \left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{25}{16} M \left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^n \right)
\end{aligned}$$

dan,

$$(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = (1+K) \frac{(V_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1})}{l_j} + K \left(Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \frac{3}{2} \left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \frac{25}{16} M \left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)$$

$$(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = (1+K) \frac{(V_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1})}{l_j} + K \left(Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \frac{3}{2} \left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \frac{25}{16} M \left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)$$

Sehingga diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & (1+K) \frac{(V_j^n - V_{j-1}^n)}{l_j} + K \left(Q_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{3}{2} \left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \\ & \frac{25}{16} M \left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + (1+K) \frac{(V_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1})}{l_j} + K \left(Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \\ & \frac{3}{2} \left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \frac{25}{16} M \left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\ & = 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned}$$

dan dapat ditulis dengan

$$\begin{aligned} & (1+K) \frac{(V_j^n - V_{j-1}^n)}{l_j} + K \left(Q_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{3}{2} \left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \\ & \frac{25}{16} M \left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^n = -(1+K) \frac{(V_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1})}{l_j} - K \left(Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \\ & \frac{3}{2} \left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \frac{25}{16} M \left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (5.19) \end{aligned}$$

Untuk persamaan momentum angular (5.10) adalah sebagai berikut :

$$\frac{1}{2} \left[(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = t^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{H_{j-\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right]$$

dengan

$$(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n = \left[\left(1 + \frac{K}{2} \right) Q' + \frac{3}{2} (FQ - HU) - K(2H + V) \right]_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$\begin{aligned} (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left(1 + \frac{K}{2} \right) \frac{(Q_j^n - Q_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{3}{2} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n U_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \\ & K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^n + V_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \end{aligned}$$

dan

$$(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = \left[\left(1 + \frac{K}{2} \right) Q' + \frac{3}{2} (FQ - HU) - K(2H + V) \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

$$(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = \left(1 + \frac{K}{2} \right) \frac{(Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1})}{l_j} + \frac{3}{2} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)$$

Sehingga diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{K}{2} \right) \frac{(Q_j^n - Q_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{3}{2} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n U_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \\ & K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^n + V_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \left(1 + \frac{K}{2} \right) \frac{(Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1})}{l_j} + \\ & \frac{3}{2} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\ & = 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned}$$

dan dapat ditulis dengan

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{K}{2} \right) \frac{(Q_j^n - Q_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{3}{2} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n U_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \\ & K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^n + V_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^n = - \left(1 + \frac{K}{2} \right) \frac{(Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \\ & \frac{3}{2} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Pada langkah ketiga dilakukan proses pelinieran persamaan-persamaan yang diperoleh dengan menggunakan metode Newton yang kemudian disajikan dalam bentuk matriks vektor. Persamaan-persamaan yang dimaksud adalah Persamaan (5.11) – (5.20). Sebelum melakukan proses pelinieran, diperkenalkan bentuk iterasi untuk metode Newton sebagai berikut :

1. Pada Waktu Kecil (*Small Time*)

$$\begin{aligned} f_j^{(i+1)} &= f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \\ u_j^{(i+1)} &= u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)} \\ v_j^{(i+1)} &= v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_j^{(i+1)} &= h_j^{(i)} + \delta h_j^{(i)} \\ q_j^{(i+1)} &= q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Kemudian dilakukan substitusi dari bentuk iterasi (5.21) ke sistem Persamaan (5.11) – (5.15), sehingga diperoleh Persamaan-persamaan sebagai berikut :

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_j - \delta u_{j-1}) = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (5.22)$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_j - \delta v_{j-1}) = -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(v_j^n - v_{j-1}^n) \quad (5.23)$$

$$(\delta h_j - \delta h_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_j - \delta q_{j-1}) = -(h_j^n - h_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(q_j^n - q_{j-1}^n) \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} & (1+K) \frac{(\delta v_j - \delta v_{j-1})}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) + K \left(\frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) - \\ & \frac{3}{2} t^n 2u_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2} t^n \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} t^n f^n \left(\frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) \\ & + \frac{3}{2} t^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2} t^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) - \\ & \frac{25}{16} M t^n \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) = -(1+K) \frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} - \\ & \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - K \left(q_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{3}{2} t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \\ & \frac{25}{16} M t^n \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n + R_1 \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{K}{2} \right) \frac{(\delta q_j - \delta q_{j-1})}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2} \right) + \\ & \frac{3}{2} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2} t^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) + \\ & \frac{3}{2} t^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2} t^n h_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) - \\ & \frac{3}{2} t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2} t^n \left(\frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) - \\ & 2 t^n K \left(\frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2} \right) - t^n K \left(\frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(\frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(q_{j-\frac{1}{2}}^n\right) - \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n - \\
&\frac{3}{2} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n\right) - t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + v_{j-\frac{1}{2}}^n\right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n + R_2 \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Dengan menghilangkan orde tinggi yang terdapat pada $\delta f_j^{(i)}, \delta u_j^{(i)}, \delta v_j^{(i)}, \delta h_j^{(i)}$, dan $\delta q_j^{(i)}$, maka diperoleh Persamaan yang lebih sederhana sebagai berikut :

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta u_j - \delta u_{j-1}) = (r_1)_j \quad (5.27)$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta v_j - \delta v_{j-1}) = (r_2)_j \quad (5.28)$$

$$(\delta h_j - \delta h_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta q_j - \delta q_{j-1}) = (r_3)_j \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned}
&(a_1)_j \delta v_j + (a_2)_j \delta v_{j-1} + (a_3)_j \delta f_j + (a_4)_j \delta f_{j-1} + (a_5)_j \delta u_j + \\
&(a_6)_j \delta u_{j-1} + (a_7)_j \delta q_j + (a_8)_j \delta q_{j-1} = (r_4)_j \quad (5.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(b_1)_j \delta q_j + (b_2)_j \delta q_{j-1} + (b_3)_j \delta f_j + (b_4)_j \delta f_{j-1} + (b_5)_j \delta u_j + \\
&(b_6)_j \delta u_{j-1} + (b_7)_j \delta h_j + (b_8)_j \delta h_{j-1} + (b_9)_j \delta v_j + (b_{10})_j \delta v_{j-1} \\
&= (r_5)_j \quad (5.31)
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
(r_1)_j &= -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (u_j^n + u_{j-1}^n) \\
(r_2)_j &= -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (v_j^n + v_{j-1}^n) \\
(r_3)_j &= -(h_j^n - h_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (q_j^n + q_{j-1}^n) \\
(r_4)_j &= -(1 + K) \frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^n\right) - K \left(q_{j-\frac{1}{2}}^n\right) - \\
&\frac{3}{2} t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n\right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n\right) - \frac{25}{16} M t^n \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n\right) + \\
&2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n - (1 + K) \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - K \left(q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - \\
&\frac{3}{2} t^{n-1} \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - \frac{25}{16} M t^{n-1} \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) \\
&- 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(r_5)_j = & -\left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (q_{j-\frac{1}{2}}^n) - \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n - \\
& \frac{3}{2} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \\
& 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n - \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - \\
& \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3}{2} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
& - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

$$(a_1)_j = \frac{(1+K)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_2)_j = -\frac{(1+K)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_3)_j = \frac{3}{4} t^n v_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_4)_j = (a_3)_j$$

$$(a_5)_j = -\frac{3}{2} t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{25}{32} M t^n - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}$$

$$(a_6)_j = (a_5)_j$$

$$(a_7)_j = \frac{1}{2} K$$

$$(a_8)_j = (a_7)_j$$

$$(b_1)_j = \frac{\left(1 + \frac{K}{2}\right)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(b_2)_j = -\frac{\left(1 + \frac{K}{2}\right)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(b_3)_j = \frac{3}{4} t^n q_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(b_4)_j = (b_3)_j$$

$$(b_5)_j = -\frac{3}{4} t^n h_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(b_6)_j = (b_5)_j$$

$$(b_7)_j = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n - t^n K - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}$$

$$(b_8)_j = (b_7)_j$$

$$(b_9)_j = -\frac{1}{2}t^n K$$

$$(b_{10})_j = (b_9)_j$$

Mengacu pada kondisi batas pada (4.60) – (4.62), maka dapat dinyatakan bahwa $\delta f_0 = 0$, $\delta u_0 = 0$, $\delta h_0 = 0$, $\delta u_N = 0$, dan $\delta h_N = 0$.

2. Pada Waktu Besar (*Large Time*)

$$F_j^{(i+1)} = F_j^{(i)} + \delta F_j^{(i)}$$

$$U_j^{(i+1)} = U_j^{(i)} + \delta U_j^{(i)}$$

$$V_j^{(i+1)} = V_j^{(i)} + \delta V_j^{(i)}$$

$$H_j^{(i+1)} = H_j^{(i)} + \delta H_j^{(i)}$$

$$Q_j^{(i+1)} = Q_j^{(i)} + \delta Q_j^{(i)} \tag{5.32}$$

Kemudian dilakukan substitusi dari bentuk iterasi (5.32) ke sistem Persamaan (5.16) – (5.20), sehingga diperoleh Persamaan-persamaan sebagai berikut :

$$(\delta F_j - \delta F_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta U_j - \delta U_{j-1}) = -(F_j^n - F_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(U_j^n - U_{j-1}^n) \tag{5.33}$$

$$(\delta U_j - \delta U_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta V_j - \delta V_{j-1}) = -(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(V_j^n - V_{j-1}^n) \tag{5.34}$$

$$(\delta H_j - \delta H_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta Q_j - \delta Q_{j-1}) = -(H_j^n - H_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(Q_j^n - Q_{j-1}^n) \tag{5.35}$$

$$(1+K)\frac{(\delta V_j - \delta V_{j-1})}{l_j} + K\left(\frac{\delta Q_j + \delta Q_{j-1}}{2}\right) -$$

$$\frac{3}{2}U_{j-\frac{1}{2}}^n\left(\frac{\delta U_j + \delta U_{j-1}}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\delta U_j + \delta U_{j-1}}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}f^n\left(\frac{\delta V_j + \delta V_{j-1}}{2}\right)$$

$$+ \frac{3}{2}V_{j-\frac{1}{2}}^n\left(\frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2}\right)\left(\frac{\delta V_j + \delta V_{j-1}}{2}\right) -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{25}{16}M\left(\frac{\delta U_j + \delta U_{j-1}}{2}\right) - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}\left(\frac{\delta U_j + \delta U_{j-1}}{2}\right) = -(1+K)\frac{(V_j^n - V_{j-1}^n)}{l_j} \\
& -K\left(Q_{j-\frac{1}{2}}^n\right) - \frac{3}{2}\left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^n\right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^n\right) - \\
& \frac{25}{16}M\left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^n\right) + 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}U_{j-\frac{1}{2}}^n + R_1
\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{K}{2}\right)\frac{(\delta Q_j - \delta Q_{j-1})}{l_j} + \frac{3}{2}f_{j-\frac{1}{2}}^n\left(\frac{\delta Q_j + \delta Q_{j-1}}{2}\right) + \\
& \frac{3}{2}Q_{j-\frac{1}{2}}^n\left(\frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2}\right)\left(\frac{\delta Q_j + \delta Q_{j-1}}{2}\right) - \\
& \frac{3}{2}H_{j-\frac{1}{2}}^n\left(\frac{\delta U_j + \delta U_{j-1}}{2}\right) - \frac{3}{2}U_{j-\frac{1}{2}}^n\left(\frac{\delta H_j + \delta H_{j-1}}{2}\right) - \\
& \frac{3}{2}\left(\frac{\delta H_j + \delta H_{j-1}}{2}\right)\left(\frac{\delta U_j + \delta U_{j-1}}{2}\right) - 2K\left(\frac{\delta H_j + \delta H_{j-1}}{2}\right) - \\
& K\left(\frac{\delta V_j + \delta V_{j-1}}{2}\right) - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}\left(\frac{\delta H_j + \delta H_{j-1}}{2}\right) = -\left(1 + \frac{K}{2}\right)\frac{(Q_j^n - Q_{j-1}^n)}{l_j} - \\
& \frac{3}{2}\left(F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n U_{j-\frac{1}{2}}^n\right) - K\left(2H_{j-\frac{1}{2}}^n + V_{j-\frac{1}{2}}^n\right) + 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}H_{j-\frac{1}{2}}^n + R_2
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Dengan menghilangkan orde tinggi yang terdapat pada $\delta f_j^{(i)}, \delta u_j^{(i)}, \delta v_j^{(i)}, \delta h_j^{(i)}$, dan $\delta q_j^{(i)}$, maka diperoleh Persamaan yang lebih sederhana sebagai berikut :

$$(\delta F_j - \delta F_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta U_j - \delta U_{j-1}) = (r_1)_j \tag{5.38}$$

$$(\delta U_j - \delta U_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta V_j - \delta V_{j-1}) = (r_2)_j \tag{5.39}$$

$$(\delta H_j - \delta H_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta Q_j - \delta Q_{j-1}) = (r_3)_j \tag{5.40}$$

$$\begin{aligned}
& (a_1)_j \delta V_j + (a_2)_j \delta V_{j-1} + (a_3)_j \delta F_j + (a_4)_j \delta F_{j-1} + (a_5)_j \delta U_j + \\
& (a_6)_j \delta U_{j-1} + (a_7)_j \delta Q_j + (a_8)_j \delta Q_{j-1} = (r_4)_j
\end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}
& (b_1)_j \delta Q_j + (b_2)_j \delta Q_{j-1} + (b_3)_j \delta F_j + (b_4)_j \delta F_{j-1} + (b_5)_j \delta U_j + \\
& (b_6)_j \delta U_{j-1} + (b_7)_j \delta H_j + (b_8)_j \delta H_{j-1} + (b_9)_j \delta V_j + (b_{10})_j \delta V_{j-1} \\
& = (r_5)_j
\end{aligned} \tag{5.42}$$

dengan

$$(r_1)_j = -(F_j^n - F_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(U_j^n + U_{j-1}^n)$$

$$(r_2)_j = -(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(V_j^n + V_{j-1}^n)$$

$$(r_3)_j = -(H_j^n - H_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(Q_j^n + Q_{j-1}^n)$$

$$(r_4)_j = -(1+K)\frac{(V_j^n - V_{j-1}^n)}{l_j} - K(Q_{j-\frac{1}{2}}^n) - \frac{3}{2}\left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^n\right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n\right) - \frac{25}{16}M\left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^n\right) + 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}U_{j-\frac{1}{2}}^n - (1+K)\frac{(V_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1})}{l_j} - K(Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - \frac{3}{2}t^{n-1}\left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - \frac{25}{16}M\left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

$$(r_5)_j = -\left(1 + \frac{K}{2}\right)\frac{(Q_j^n - Q_{j-1}^n)}{l_j} - \frac{3}{2}\left(F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n U_{j-\frac{1}{2}}^n\right) + K\left(2H_{j-\frac{1}{2}}^n + V_{j-\frac{1}{2}}^n\right) + 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}H_{j-\frac{1}{2}}^n - \left(1 + \frac{K}{2}\right)\frac{(Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{3}{2}\left(F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) + K\left(2H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

$$(a_1)_j = \frac{(1+K)}{l_j} + \frac{3}{4}t^n F_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_2)_j = -\frac{(1+K)}{l_j} + \frac{3}{4}t^n F_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_3)_j = \frac{3}{4}V_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_4)_j = (a_3)_j$$

$$(a_5)_j = -\frac{3}{2}U_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{25}{32}M - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}$$

$$(a_6)_j = (a_5)_j$$

$$(a_7)_j = \frac{1}{2}K$$

$$(a_8)_j = (a_7)_j$$

$$\begin{aligned}
(b_1)_j &= \frac{\left(1 + \frac{K}{2}\right)}{l_j} + \frac{3}{4} F_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_2)_j &= -\frac{\left(1 + \frac{K}{2}\right)}{l_j} + \frac{3}{4} F_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_3)_j &= \frac{3}{4} Q_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_4)_j &= (b_3)_j \\
(b_5)_j &= -\frac{3}{4} H_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_6)_j &= (b_5)_j \\
(b_7)_j &= -\frac{3}{4} U_{j-\frac{1}{2}}^n - K - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
(b_8)_j &= (b_7)_j \\
(b_9)_j &= -\frac{1}{2} K \\
(b_{10})_j &= (b_9)_j
\end{aligned}$$

Mengacu pada kondisi batas pada (4.60) – (4.62), maka dapat dinyatakan bahwa $\delta f_0 = 0$, $\delta u_0 = 0$, $\delta h_0 = 0$, $\delta u_N = 0$, dan $\delta h_N = 0$.

Pada langkah keempat, hasil dari proses pelinieran diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal. Persamaan-persamaan dari hasil linierisasi di atas dapat diselesaikan dengan teknik eliminasi blok tridiagonal yang berupa matriks blok. Hal ini yang merupakan ciri dari penyelesaian dengan metode Keller-Box, karena pada penyelesaian dengan matriks tridiagonal, pada umumnya elemen-elemennya berisi konstanta-konstanta. Hasil dari proses linierisasi tersebut dapat dibentuk matriks blok tridiagonal dengan cara dinyatakan dalam keadaan yaitu saat $j = 1$, $j = N - 1$, dan $j = N$ sebagai berikut :

1. Saat $j = 1$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$(\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{l_j}{2} (\delta u_1 - \delta u_0) = (r_1)_1 \quad (5.43)$$

$$(\delta u_1 - \delta u_0) - \frac{l_j}{2} (\delta v_1 - \delta v_0) = (r_2)_1 \quad (5.44)$$

$$(\delta h_1 - \delta h_0) - \frac{l_j}{2}(\delta q_1 - \delta q_0) = (r_3)_1 \quad (5.45)$$

$$(a_1)_1 \delta v_1 + (a_2)_1 \delta v_0 + (a_3)_1 \delta f_1 + (a_4)_1 \delta f_0 + (a_5)_1 \delta u_1 + (a_6)_1 \delta u_0 + (a_7)_1 \delta q_1 + (a_8)_1 \delta q_0 = (r_4)_1 \quad (5.46)$$

$$(b_1)_1 \delta q_1 + (b_2)_1 \delta q_0 + (b_3)_1 \delta f_1 + (b_4)_1 \delta f_0 + (b_5)_1 \delta u_1 + (b_6)_1 \delta u_0 + (b_7)_1 \delta h_1 + (b_8)_1 \delta h_0 + (b_9)_1 \delta v_1 + (b_{10})_1 \delta v_0 = (r_5)_1 \quad (5.47)$$

dengan kondisi batas $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta h_0 = 0$, maka sistem Persamaan (5.43) – (5.47) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} \\ (a_2)_1 & (a_8)_1 & (a_3)_1 & (a_1)_1 & (a_7)_1 \\ (b_{10})_1 & (b_2)_1 & (b_3)_1 & (b_9)_1 & (b_1)_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_0 \\ \delta q_0 \\ \delta f_1 \\ \delta v_1 \\ \delta q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_5)_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (b_5)_1 & (b_7)_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta h_1 \\ \delta f_2 \\ \delta v_2 \\ \delta q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_1 \\ (r_2)_1 \\ (r_3)_1 \\ (r_4)_1 \\ (r_5)_1 \end{bmatrix}$$

Saat $j = 1$, dapat dinyatakan secara sederhana sebagai $[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1]$.

2. Saat $j = N - 1$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$(\delta f_{N-1} - \delta f_{N-2}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_{N-1} - \delta u_{N-2}) = (r_1)_{N-1} \quad (5.48)$$

$$(\delta u_{N-1} - \delta u_{N-2}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_{N-1} - \delta v_{N-2}) = (r_2)_{N-1} \quad (5.49)$$

$$(\delta h_{N-1} - \delta h_{N-2}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_{N-1} - \delta q_{N-2}) = (r_3)_{N-1} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} & (a_1)_{N-1}\delta v_{N-1} + (a_2)_{N-1}\delta v_{N-2} + (a_3)_{N-1}\delta f_{N-2} + (a_4)_{N-1}\delta f_{N-2} + \\ & (a_5)_{N-1}\delta u_{N-1} + (a_6)_{N-1}\delta u_{N-2} + (a_7)_{N-1}\delta q_{N-1} + (a_8)_{N-1}\delta q_{N-2} = \\ & (r_4)_{N-1} \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} & (b_1)_{N-1}\delta q_{N-2} + (b_2)_{N-1}\delta q_{N-2} + (b_3)_{N-1}\delta f_{N-1} + (b_4)_{N-1}\delta f_{N-2} + \\ & (b_5)_{N-1}\delta u_{N-1} + (b_6)_{N-1}\delta u_{N-2} + (b_7)_{N-1}\delta h_{N-1} + (b_8)_{N-1}\delta h_{N-2} + \\ & (b_9)_{N-1}\delta v_{N-1} + (b_{10})_{N-1}\delta v_{N-2} = (r_5)_{N-1} \end{aligned} \quad (5.52)$$

dengan kondisi batas $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta h_0 = 0$, maka sistem Persamaan (5.43) – (5.47) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ 0 & 0 & (a_4)_{N-1} & (a_2)_{N-1} & (a_8)_{N-1} \\ 0 & 0 & (b_4)_{N-1} & (b_{10})_{N-1} & (b_2)_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_{N-2} \\ \delta q_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ (a_6)_{N-1} & 0 & (a_3)_{N-1} & (a_1)_{N-1} & (a_7)_{N-1} \\ (b_6)_{N-1} & (b_8)_{N-1} & (b_3)_{N-1} & (b_9)_{N-1} & (b_1)_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{N-2} \\ \delta h_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_5)_{N-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (b_5)_{N-1} & (b_7)_{N-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta h_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_{N-1} \\ (r_2)_{N-1} \\ (r_3)_{N-1} \\ (r_4)_{N-1} \\ (r_5)_{N-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Saat $j = N$, dapat dinyatakan secara sederhana sebagai $[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j]$.

3. Saat $j = N$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$(\delta f_N - \delta f_{N-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_N - \delta u_{N-1}) = (r_1)_N \quad (5.53)$$

$$(\delta u_N - \delta u_{N-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_N - \delta v_{N-1}) = (r_2)_N \quad (5.54)$$

$$(\delta h_N - \delta h_{N-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_N - \delta q_{N-1}) = (r_3)_N \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} & (a_1)_N \delta v_N + (a_2)_N \delta v_{N-1} + (a_3)_N \delta f_{N-1} + (a_4)_N \delta f_{N-1} + (a_5)_N \delta u_N + \\ & (a_6)_N \delta u_{N-1} + (a_7)_N \delta q_N + (a_8)_N \delta q_{N-1} = (r_4)_N \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} & (b_1)_N \delta q_{N-1} + (b_2)_N \delta q_{N-1} + (b_3)_N \delta f_N + (b_4)_N \delta f_{N-1} + (b_5)_N \delta u_N + \\ & (b_6)_N \delta u_{N-1} + (b_7)_N \delta h_N + (b_8)_N \delta h_{N-1} + (b_9)_N \delta v_N + (b_{10})_N \delta v_{N-1} \\ & = (r_5)_N \end{aligned} \quad (5.57)$$

dengan kondisi batas $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta h_0 = 0$, maka sistem Persamaan (5.43) – (5.47) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ 0 & 0 & (a_4)_N & (a_2)_N & (a_8)_N \\ 0 & 0 & (b_4)_N & (b_{10})_N & (b_2)_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_{N-1} \\ \delta p_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{l_N}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ (a_6)_N & 0 & (a_3)_N & (a_1)_N & (a_7)_N \\ (b_6)_N & (b_8)_N & (b_3)_N & (b_9)_N & (b_1)_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta h_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_N \\ (r_2)_N \\ (r_3)_N \\ (r_4)_N \\ (r_5)_N \end{bmatrix}$$

Saat $j = N$, dapat dinyatakan secara sederhana sebagai $[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] = [r_j]$.

Sehingga dari ketiga keadaan tersebut ($j = 1, j = N - 1$, dan $j = N$) untuk $j = 1, 2, \dots, N - 1, N$ dapat dinyatakan dalam bentuk sederhana sebagai berikut :

$$\begin{aligned} j = 1 & : [A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1] \\ j = 2 & : [B_2][\delta_1] + [A_2][\delta_2] + [C_2][\delta_3] = [r_2] \\ & \vdots \\ j = N - 1 & : [B_{N-1}][\delta_{N-2}] + [A_{N-1}][\delta_{N-1}] + [C_{N-1}][\delta_N] = [r_{N-1}] \\ j = N & : [B_N][\delta_{N-1}] + [A_N][\delta_N] = [r_N] \end{aligned}$$

Atau dapat pula dinyatakan ke dalam bentuk

$$\mathbf{A}\delta = \mathbf{r} \quad (5.58)$$

Dengan matriks-matriks \mathbf{A} , δ , dan \mathbf{r} adalah matriks-matriks yang elemennya adalah sebagai berikut :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [A_1] & [C_1] & & & \\ [B_2] & [A_2] & [C_2] & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & [B_{N-1}] & [A_{N-1}] & [C_{N-1}] \\ & & & & [B_N] & [A_N] \end{bmatrix}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} [\delta_1] \\ [\delta_2] \\ \vdots \\ [\delta_{N-1}] \\ [\delta_N] \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ \vdots \\ [r_{N-1}] \\ [r_N] \end{bmatrix}$$

Dari Persamaan (5.58) terlihat bahwa matriks \mathbf{A} merupakan matriks tridiagonal yang setiap elemennya bernilai nol, kecuali pada tiga diagonal utamanya. Teknik eliminasi blok digunakan untuk menyelesaikan Persamaan (5.58) dengan cara matriks \mathbf{A} yang terbentuk diasumsikan merupakan matriks yang *non singular*. Dari asumsi tersebut, matriks \mathbf{A} dapat difaktorkan

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{U} \quad (5.59)$$

dengan matriks \mathbf{L} dan matriks \mathbf{U} sebagai berikut :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} [\alpha_1] & & & & \\ [B_2] & [\delta_1] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [\alpha_{N-1}] \\ & & & & [B_N] & [\alpha_N] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} [I] & [\Gamma_1] & & & \\ & [I] & [\Gamma_2] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & [I] & [\Gamma_{N-1}] \\ & & & & & [I] \end{bmatrix}$$

Dengan matriks identitas $[I]$ berdimensi 5×5 serta $[\alpha_j]$ dan $[\Gamma_j]$ adalah matriks berukuran 5×5 dengan setiap elemennya ditentukan oleh persamaan-persamaan berikut :

$$\begin{aligned} [\alpha_1] &= [A_1] \\ [\alpha_1][\Gamma_1] &= [C_1] \\ [\alpha_j] &= [A_j] - [B_j][\Gamma_{j-1}], j = 2, 3, \dots, N \\ [\alpha_j][\Gamma_j] &= [C_j], j = 2, 3, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

dengan melakukan substitusi Persamaan (5.59) ke Persamaan (5.58) maka diperoleh Persamaan

$$\mathbf{L} \mathbf{U} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{r} \quad (5.60)$$

Dengan $\mathbf{U} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{W}$, maka Persamaan (5.60) menjadi

$$\mathbf{L} \mathbf{W} = \mathbf{r} \quad (5.61)$$

dengan,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ \vdots \\ [W_{N-1}] \\ [W_N] \end{bmatrix}$$

dan $[W_j]$ merupakan matriks 5×1 dengan setiap elemennya diperoleh dari Persamaan (5.61) yaitu

$$\begin{aligned} [\alpha_1][W_1] &= [r_1] \\ [\alpha_j][W_j] &= [r_j] - [B_j][W_{j-1}], 2 \leq j \leq N \end{aligned}$$

Kemudian diperoleh setiap elemen dari matriks \mathbf{W} , sehingga dapat diperoleh penyelesaian dari $\boldsymbol{\delta}$ pada Persamaan $\mathbf{U} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{W}$ dengan menggunakan Persamaan di bawah ini

$$\begin{aligned} [\delta_j] &= [W_j] \\ [\alpha_j] &= [W_j] - [\Gamma_j][\delta_{j+1}], 1 \leq j \leq N - 1 \end{aligned}$$

Setelah diperoleh nilai δ , maka Persamaan (5.38) – (5.42) dapat dipakai untuk memperoleh solusi dari Persamaan $U\delta = W$ dengan menjalankan iterasi sampai kriteria konvergensi terpenuhi. Dengan kriteria konvergensi $v(0, t)$ dan iterasi berhenti pada $|\delta v(0, t)| < \epsilon$ dengan sebarang nilai $\epsilon > 0$ yang sangat kecil (Cebeci and Bradshaw). Menurut Mohammad pada tahun 2014, ϵ yang digunakan adalah 10^{-5} .

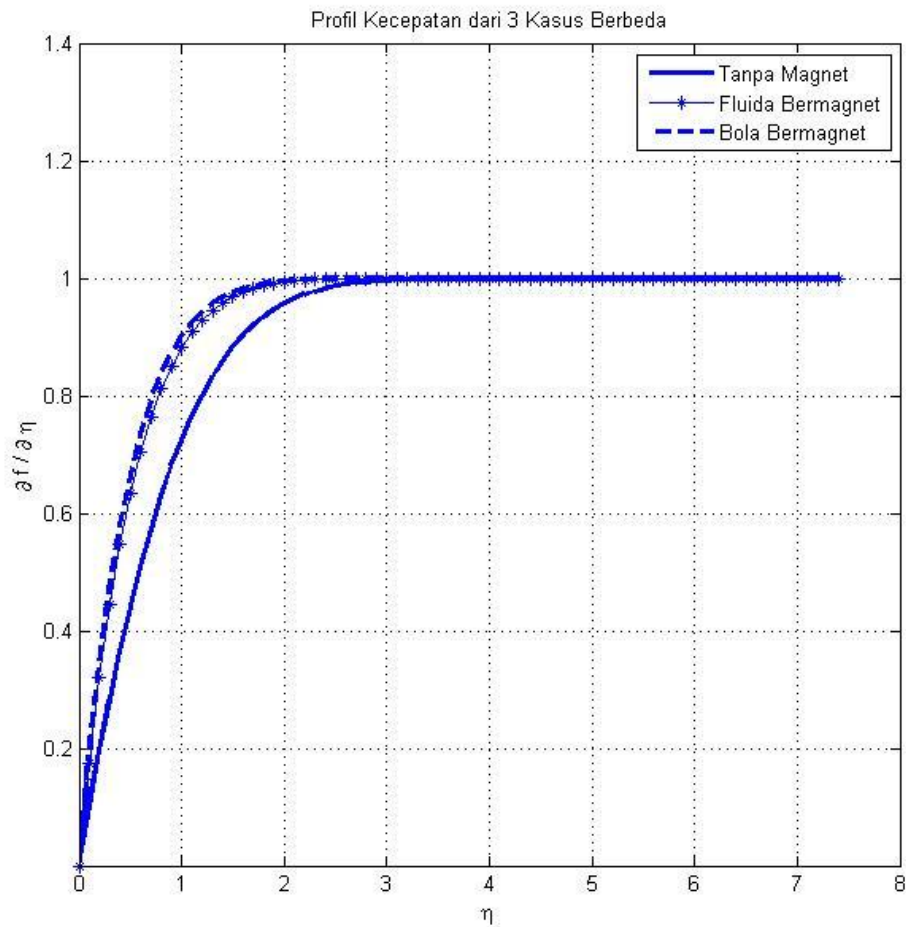
5.2. Hasil Simulasi Numerik

Pada Bab 5.1. telah dilakukan penyelesaian dari model matematika yang diperoleh dari permasalahan magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet dengan metode Keller-Box. Selanjutnya dilakukan simulasi dengan memberikan inputan beberapa variasi yaitu variasi magnetik (M) dan variasi parameter bahan / mikropolar (K) pada titik stagnasi terendah yakni $x = 0^\circ$. Selain itu, juga dilakukan variasi pada jenis-jenis aliran yang terjadi yakni saat $n = 0$ dan $n = 0,5$ yang berarti bahwa aliran fluida mikrokutub yang terjadi adalah pada konsentrasi pekat dan setengah pekat (Abdel-Rahman 2009; Das, 2012). Selain itu untuk variasi $n = 1$ yang berarti bahwa fluida mikrokutub yang mengalir secara turbulen. (Das:2012). Dilakukan simulasi numerik bertujuan untuk mengetahui bagaimana profil kecepatan dan profil mikrorotasi dari pengaruh variasi magnetik (M). Dengan $\delta\eta = l_j = 0.1$ yang berarti bahwa *step size* η dan $\delta t = k^n = 0.05$ yang merupakan *step size* dari t . η merepresentasikan ketebalan dari lapisan batas yang terbentuk.

5.2.1. Pengaruh Variasi Parameter Magnetik terhadap Profil Kecepatan

Pada kajian tentang magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet dilakukan pengamatan pada profil kecepatan dari aliran fluida yang dipengaruhi oleh medan magnet yang berasal dari bola bermagnet dan fluida yang terinduksi medan magnet. Sebelum dibahas mengenai hasil simulasi numerik dari penelitian ini, ditunjukkan perbedaan profil kecepatan pada fluida mikrokutub konsentrasi pekat ($n = 0$) yang terjadi pada 3 kasus yaitu :

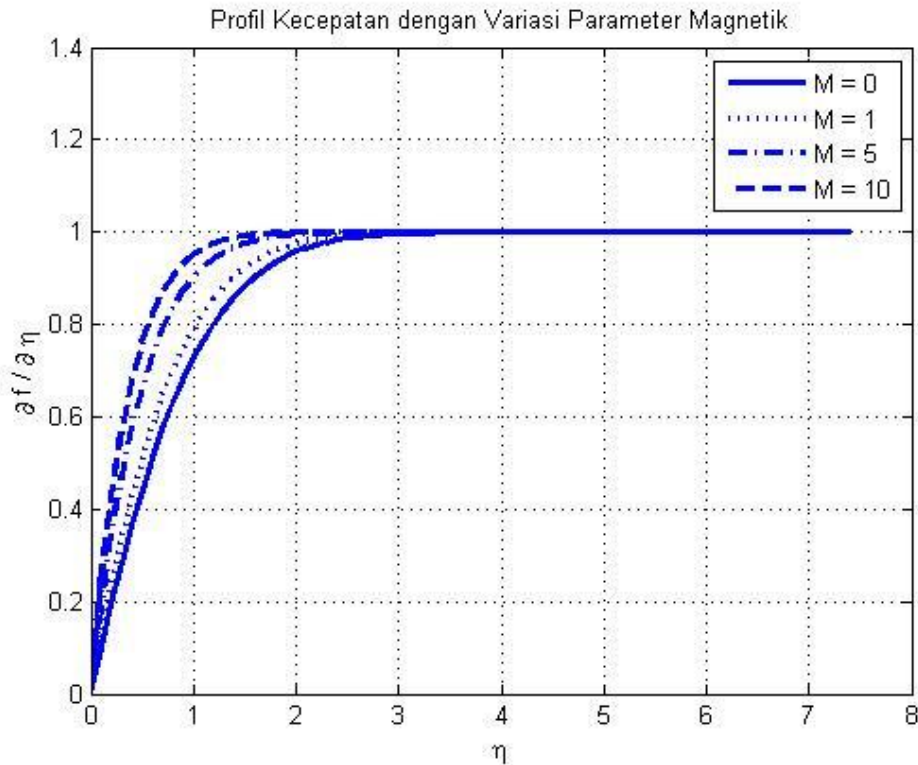
1. Fluida dan bola yang tidak bermagnet ($M = 0$),
2. Fluida bermagnet ($M = 5$) dengan bola yang tidak bermagnet (Anggriani : 2015),
3. Bola bermagnet dan fluida yang terinduksi magnet dari bola ($M = 5$). Hasil simulasi dari ketiga kasus tersebut diperoleh sebagai berikut :



Gambar 5.2 : Perbedaan Profil Kecepatan pada 3 Kasus yang berbeda

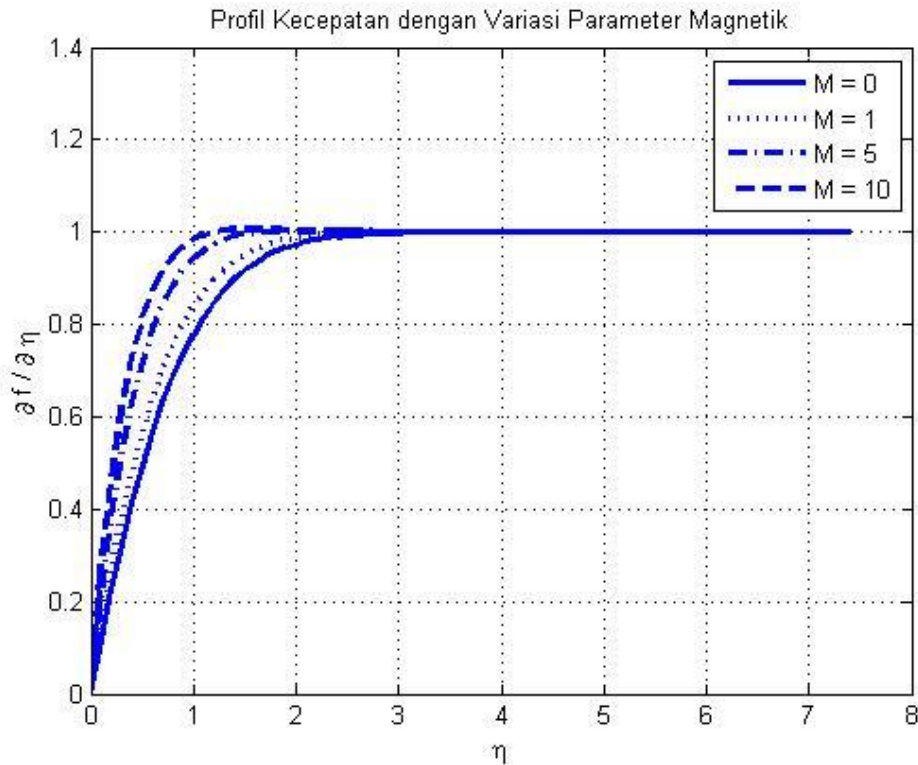
Pada gambar (5.2), terlihat bahwa pada $0 < \eta < 3$ terdapat perbedaan profil kecepatan dari fluida mikrokutub yang terjadi pada ketiga kasus di atas. Hal ini ditunjukkan bahwa pada kasus 1, profil kecepatannya lebih kecil jika dibandingkan dengan kasus 2. Namun profil kecepatan dari kasus 2 lebih kecil dibandingkan dengan profil kecepatan pada kasus 3. Hal tersebut berarti bahwa dari ketiga kasus di atas, kasus 3 memiliki profil kecepatan yang lebih besar daripada kasus 1 dan kasus 2 dikarenakan parameter magnetik yang lebih besar mempengaruhi profil kecepatan sehingga menjadi lebih besar pula.

Selanjutnya dibahas tentang profil kecepatan dari penelitian ini dengan beberapa variasi parameter magnetik sebagai berikut :



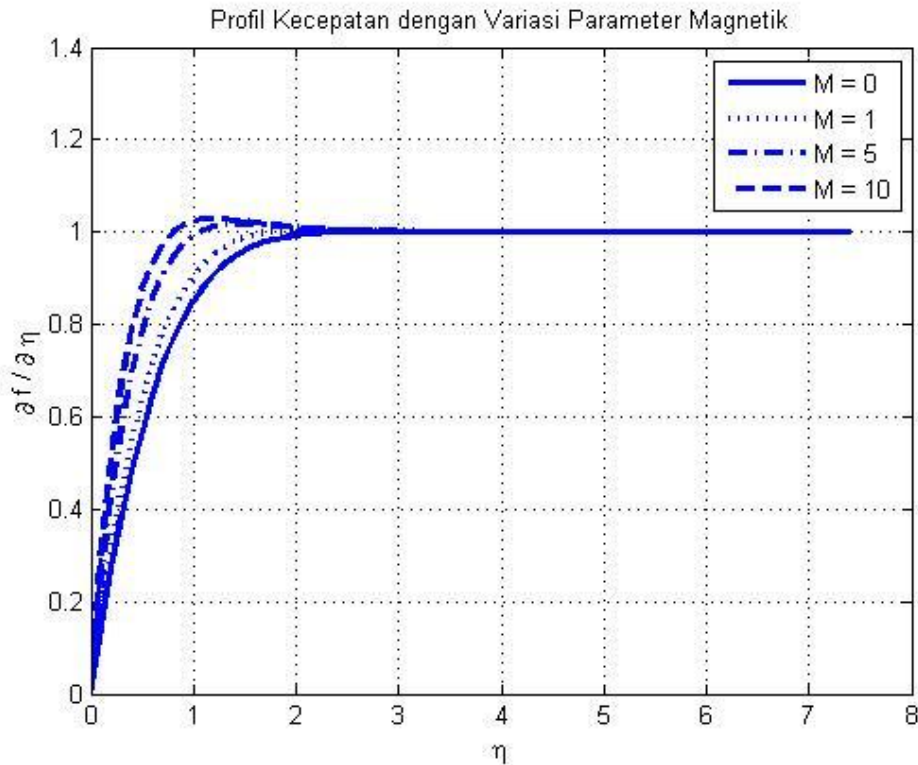
Gambar 5.3 : Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik, $K = 1, n = 0$

Pada gambar (5.3), pada fluida mikrokutub dengan konsentrasi pekat ($n = 0$) menunjukkan bahwa pada $0 < \eta < 3$, semakin besar pengaruh medan magnet yang diberikan, maka semakin besar pula kecepatan aliran dari fluida mikrokutub. Hal ini terjadi karena pengaruh besarnya gaya Lorentz yang semakin besar bersamaan dengan bertambahnya medan magnet yang mempengaruhi sistem. Hal tersebut dapat terlihat pada $M = \frac{a\sigma(b+B_0)^2}{\rho U_\infty}$ yang menunjukkan bahwa parameter magnetik M berbanding lurus dengan besar gaya Lorentz yang bekerja pada sistem ($b + B_0$). Kecepatan fluida mikrokutub adalah nol, ketika pertama menyentuh permukaan bola di titik stagnasi $x = 0^\circ$, kemudian kecepatan aliran fluida mikrokutub akan semakin besar dan menuju (konvergen) pada nilai 1 yang artinya bahwa kecepatan aliran fluida mikrokutub akan mengikuti kecepatan aliran bebas U_∞ .



Gambar 5.4 : Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik, $K = 1, n = 0,5$

Pada gambar (5.4), pada fluida mikroktub dengan konsentrasi setengah pekat ($n = 0,5$) menunjukkan bahwa pada $0 < \eta < 3$, semakin besar pengaruh medan magnet yang diberikan, maka semakin besar pula kecepatan aliran dari fluida mikroktub. Hal ini terjadi karena pengaruh besarnya gaya Lorentz yang semakin besar bersamaan dengan bertambahnya medan magnet yang mempengaruhi sistem. Hal tersebut dapat terlihat pada $M = \frac{a\sigma(b+B_0)^2}{\rho U_\infty}$ yang menunjukkan bahwa parameter magnetik M berbanding lurus dengan besar gaya Lorentz yang bekerja pada sistem ($b + B_0$). Kecepatan fluida mikroktub adalah nol, ketika pertama menyentuh permukaan bola di titik stagnasi $x = 0^\circ$, kemudian kecepatan aliran fluida mikroktub akan semakin besar dan menuju (konvergen) pada nilai 1 yang artinya bahwa kecepatan aliran fluida mikroktub akan mengikuti kecepatan aliran bebas U_∞ .



Gambar 5.5 : Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik, $K = 1, n = 1$

Pada gambar (5.5), pada fluida mikrokutub yang mengalir secara turbulen ($n = 1$) menunjukkan bahwa pada $0 < \eta < 2.5$ semakin besar pengaruh medan magnet yang diberikan, maka semakin besar pula kecepatan aliran dari fluida mikrokutub. Hal ini terjadi karena pengaruh besarnya gaya Lorentz yang semakin besar bersamaan dengan bertambahnya medan magnet yang mempengaruhi sistem. Hal tersebut dapat terlihat pada $M = \frac{a\sigma(b+B_0)^2}{\rho U_\infty}$ yang menunjukkan bahwa parameter magnetik M berbanding lurus dengan besar gaya Lorentz yang bekerja pada sistem $(b + B_0)$. Kecepatan fluida mikrokutub adalah nol, ketika pertama menyentuh permukaan bola di titik stagnasi $x = 0^\circ$, kemudian kecepatan aliran fluida mikrokutub akan semakin besar (melebihi nilai 1) dan turun menuju (konvergen) pada nilai 1 yang artinya bahwa kecepatan aliran fluida mikrokutub akan mengikuti kecepatan aliran bebas U_∞ .

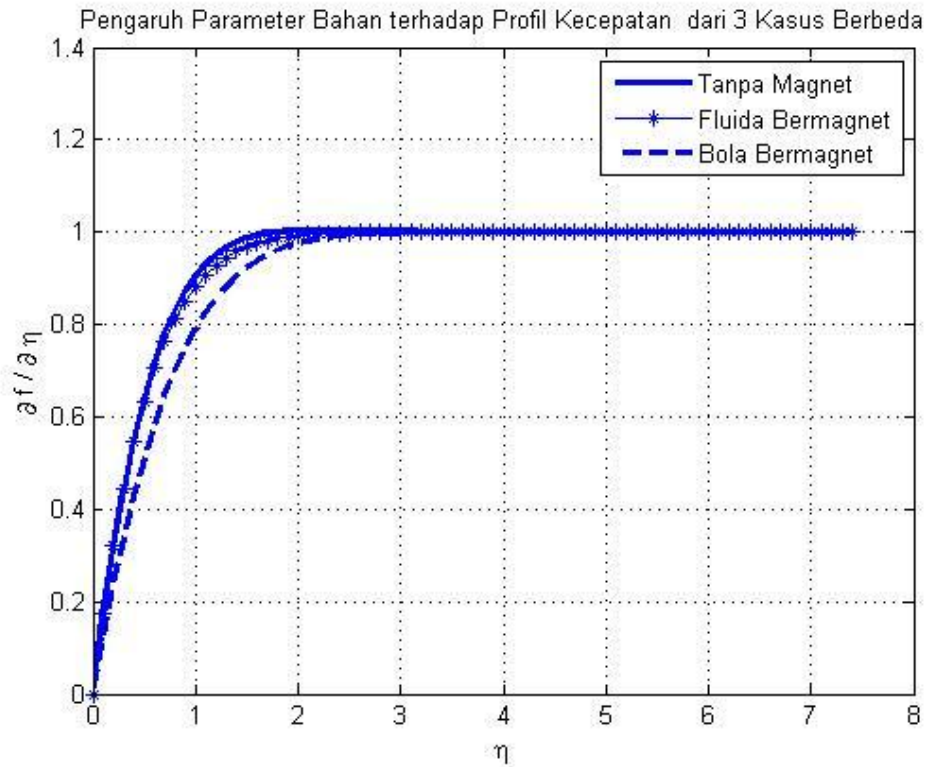
5.2.2. Pengaruh Variasi Parameter Bahan (Micropolar) terhadap Profil Kecepatan

Parameter bahan (micropolar) adalah salah satu parameter yang berpengaruh pada fluida mikrokutub. Simulasi ini bertujuan untuk mengetahui besarnya pengaruh dari parameter bahan terhadap kecepatan aliran fluida mikrokutub. Sebelum dibahas mengenai hasil simulasi numerik dari penelitian

ini, ditunjukkan perbedaan profil kecepatan pada fluida mikroktub konsentrasi pekat ($n = 0$) dan $K = 1$ yang terjadi pada 3 kasus yaitu :

1. Fluida dan bola yang tidak bermagnet ($M = 0$),
2. Fluida bermagnet ($M = 5$) dengan bola yang tidak bermagnet (Anggriani : 2015),
3. Bola bermagnet dan fluida yang terinduksi magnet dari bola ($M = 5$).

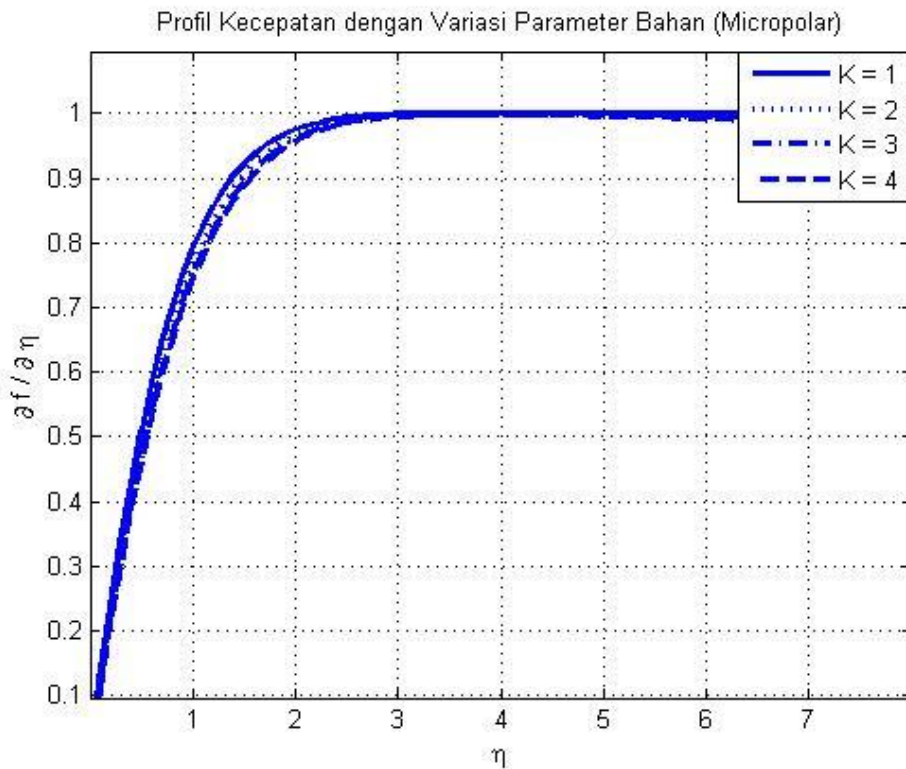
Hasil simulasi dari ketiga kasus tersebut diperoleh sebagai berikut :



Gambar 5.6 : Perbedaan Profil Kecepatan dengan adanya pengaruh parameter bahan pada 3 Kasus yang berbeda

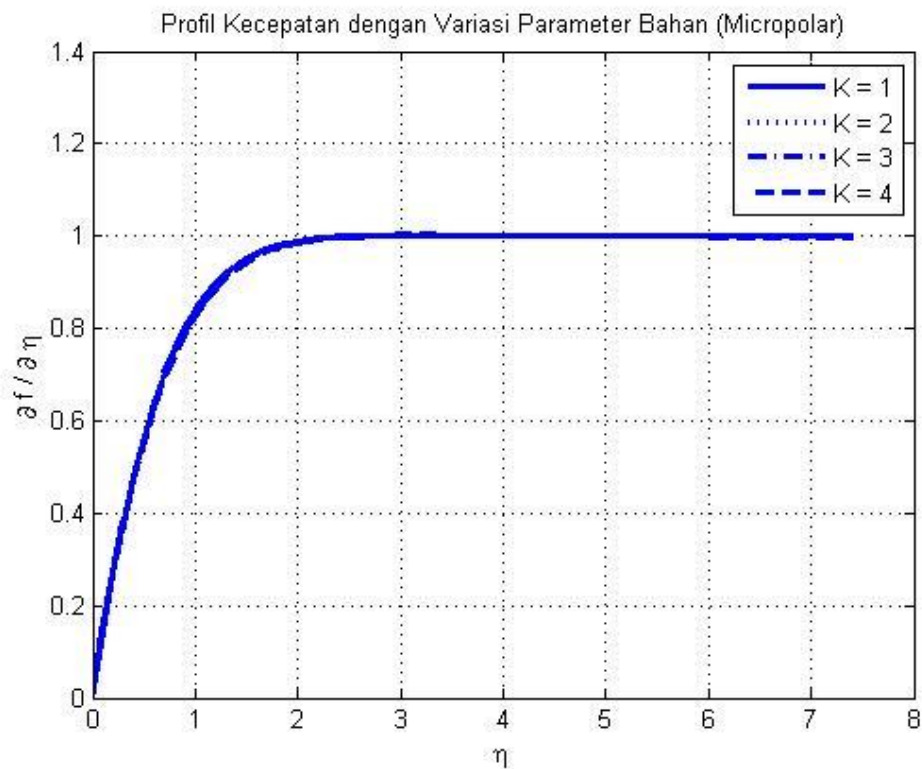
Pada gambar (5.6) terlihat bahwa pada $0 < \eta < 3$, profil kecepatan pada kasus 1 lebih besar jika dibandingkan dengan kasus 2 dan kasus 3. Namun profil kecepatan pada kasus 2 lebih besar dibandingkan dengan profil kecepatan pada kasus 3.

Selanjutnya dibahas tentang profil kecepatan dari penelitian ini dengan beberapa variasi parameter bahan yaitu $K = 1, K = 2, K = 3$, dan $K = 4$ dengan besar parameter magnetik $M = 1$ sebagai berikut :



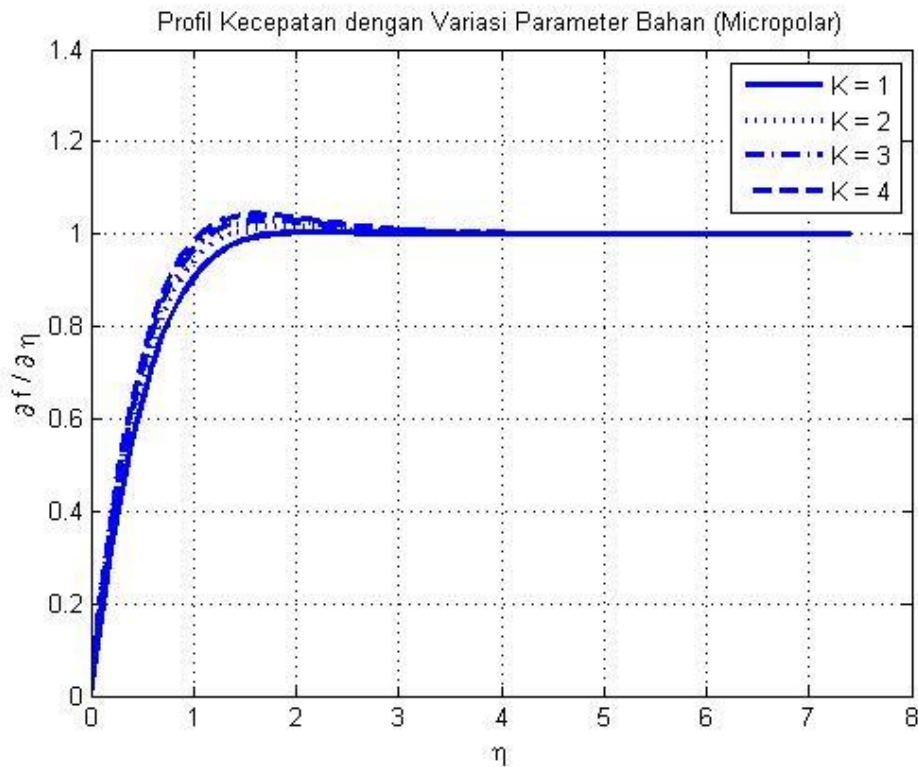
Gambar 5.7 : Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Bahan, $M = 1, n = 0$

Pada gambar (5.7), pada fluida mikrokutub yang berkonsentrasi pekat, terlihat bahwa pada $0 < \eta < 3$, semakin besar nilai parameter bahan yang diberikan, maka akan semakin kecil kecepatan dari fluida mikrokutub. Hal ini terjadi karena semakin besarnya gesekan yang terjadi antar partikel fluida mikrokutub saat mengalir, sehingga terjadi penurunan kecepatan aliran fluida. Selain itu dengan semakin besarnya parameter bahan yang diberikan, maka mengakibatkan semakin besar pula momentum liniernya, sehingga gradien kecepatan yang dihasilkan akan semakin kecil.



Gambar 5.8 : Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Bahan, $M = 1, n = 0,5$

Pada gambar (5.8), pada fluida mikrokutub yang berkonsentrasi setengah pekat, terlihat bahwa pada $0 < \eta < 3$, semakin besar nilai parameter bahan yang diberikan, maka akan semakin kecil kecepatan dari fluida mikrokutub. Hal ini terjadi karena semakin besarnya gesekan yang terjadi antar partikel fluida mikrokutub saat mengalir, sehingga terjadi penurunan kecepatan aliran fluida. Selain itu dengan semakin besarnya parameter bahan yang diberikan, maka mengakibatkan semakin besar pula momentum liniernya, sehingga gradien kecepatan yang dihasilkan akan semakin kecil.



Gambar 5.9 : Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Bahan, $M = 1, n = 1$

Pada gambar (5.9), pada fluida mikrokutub yang mengalir secara turbulen, terlihat bahwa pada $0 < \eta < 3$, semakin besar nilai parameter bahan yang diberikan, maka akan semakin besar kecepatan dari fluida mikrokutub. Hal ini terjadi karena semakin kecil gesekan yang terjadi antar partikel fluida mikrokutub saat mengalir, sehingga terjadi peningkatan kecepatan aliran fluida.

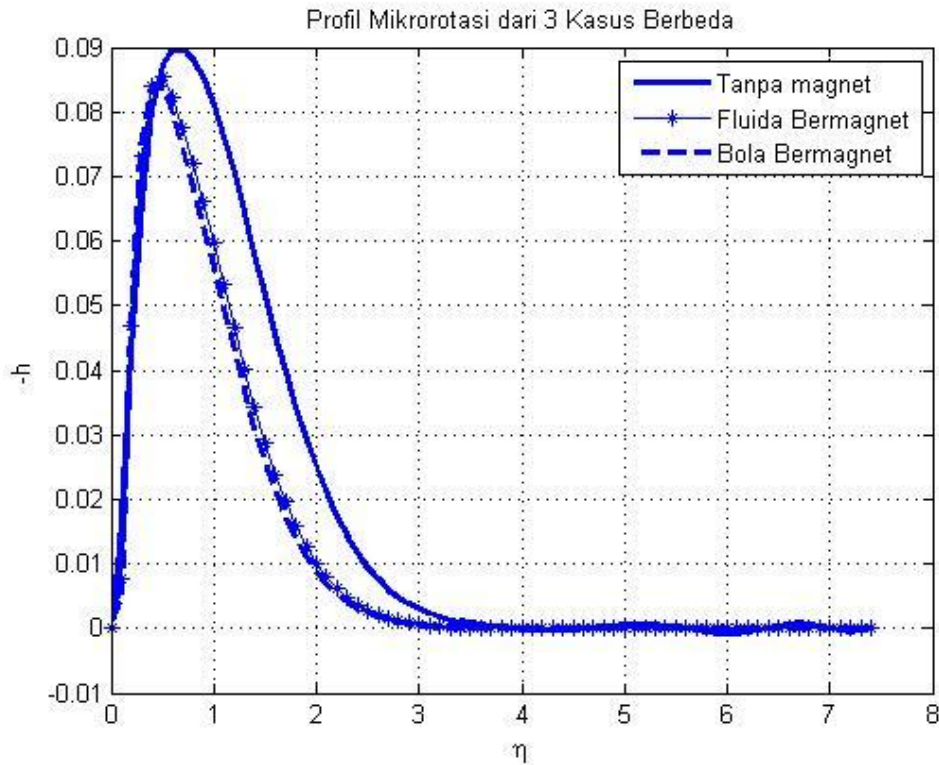
5.2.3. Pengaruh Variasi Parameter Magnetik terhadap Profil Mikrorotasi

Fluida Mikrokutub merupakan jenis fluida yang unik karena memiliki struktur mikro. Selain itu fluida ini juga terbentuk dari partikel-partikel kaku yang berukuran mikro yang dapat berorientasi secara acak pada media kental dan mendukung *body couple* sehingga fluida mikrokutub dapat melakukan mikrorotasi. Hal ini sangat menarik untuk diteliti, karena dapat merepresentasikan prediksi sifat fluida dalam skala yang sangat kecil. Simulasi ini bertujuan untuk mengetahui profil mikrorotasi fluida mikrokutub di sekitar titik stagnasi.

Sebelum dibahas mengenai hasil simulasi numerik pengaruh variasi parameter magnetik terhadap profil mikrorotasi, ditunjukkan perbedaan profil mikrorotasi pada fluida mikrokutub konsentrasi pekat ($n = 0$) yang terjadi pada 3 kasus yaitu :

1. Fluida dan bola yang tidak bermagnet ($M = 0$),

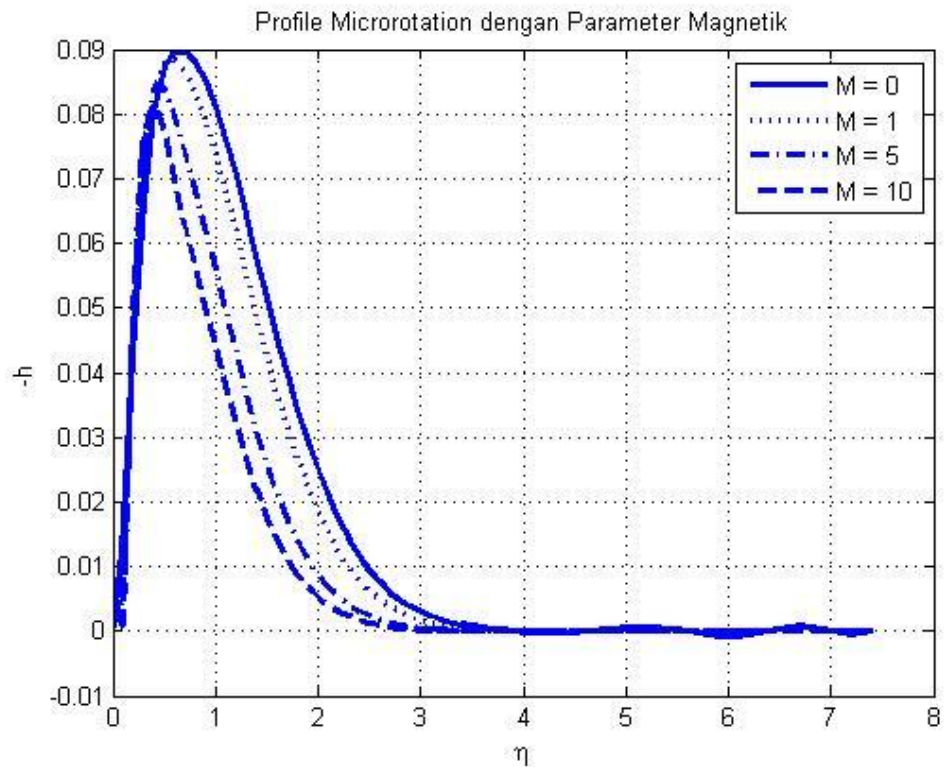
2. Fluida bermagnet ($M = 5$) dengan bola yang tidak bermagnet (Anggriani : 2015),
3. Bola bermagnet dan fluida yang terinduksi magnet dari bola ($M = 5$). Hasil simulasi dari ketiga kasus tersebut diperoleh sebagai berikut :



Gambar 5.10 : Perbedaan Profil Mikrorotasi dengan variasi parameter magnetik pada 3 Kasus yang berbeda

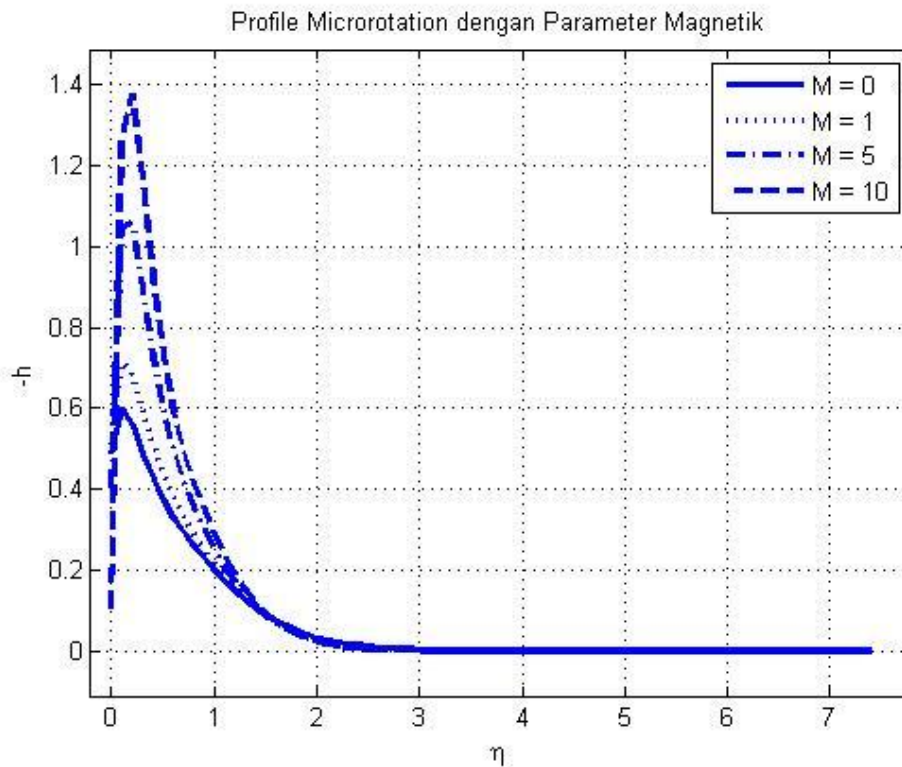
Pada gambar (5.10), terlihat bahwa $0 < \eta < 4$ terdapat perbedaan profil mikrorotasi dari fluida mikrokutub yang terjadi pada ketiga kasus di atas. Hal ini ditunjukkan bahwa pada kasus 1, profil mikrorotasinya lebih besar jika dibandingkan dengan kasus 2. Namun profil mikrorotasi dari kasus 2 lebih besar dibandingkan dengan profil mikrorotasi pada kasus 3. Hal tersebut berarti bahwa dari ketiga kasus di atas, kasus 3 memiliki profil mikrorotasi yang lebih kecil daripada kasus 1 dan kasus 2 dikarenakan parameter magnetik yang lebih besar mempengaruhi profil mikrorotasi sehingga menjadi lebih kecil.

Selanjutnya dibahas tentang profil mikrorotasi dari penelitian ini dengan beberapa variasi parameter magnetik sebagai berikut :



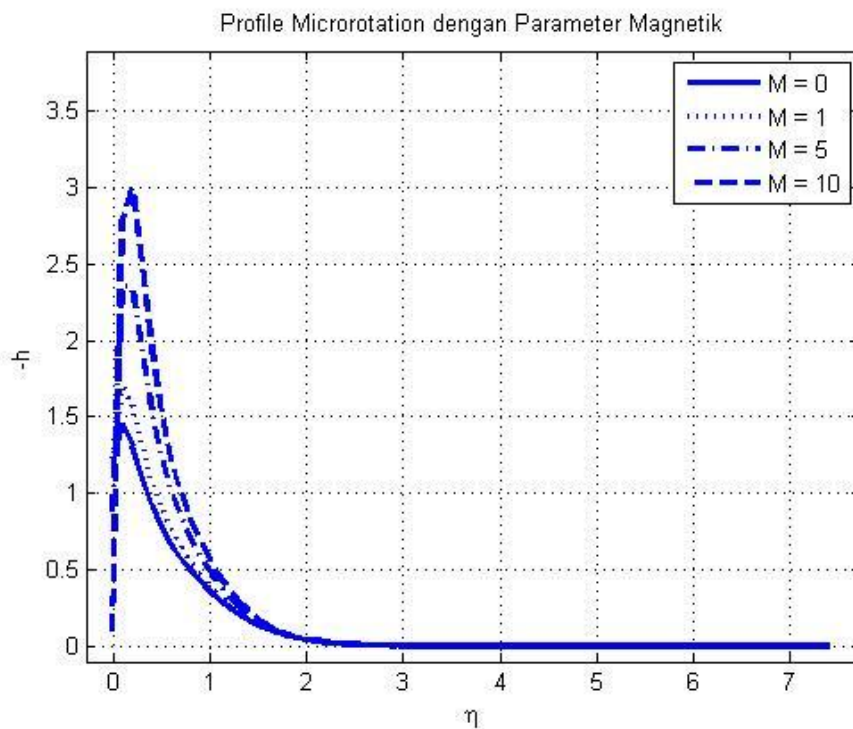
Gambar 5.11 : Profil Mikrorotasi dengan Variasi Parameter Magnetik, $K = 1, n = 0$

Pada gambar (5.11), pada fluida mikrokutub yang berkonsentrasi pekat, terlihat bahwa pada $0 < \eta < 4$ ketika pertama menyentuh permukaan bola pada titik stagnasi, kecepatannya adalah nol yang berarti rasio antara gesekan fluida dipermukaan dengan komponen vektor mikrorotasi bernilai nol. Hal ini menyebabkan elemen mikro yang berada di dekat permukaan bola tidak dapat melakukan mikrorotasi. Ketika semakin menjauhi titik stagnasi, kecepatannya akan semakin meningkat saat ketebalan lapisan batas mendekati nilai 1 dan akan menurun secara signifikan menuju (konvergen) ke nilai 0 saat $\eta > 4$. Hal ini berarti elemen mikro berhenti berotasi saat lapisan batas semakin menebal.



Gambar 5.12 : Profil Mikrorotasi dengan Variasi Parameter Magnetik, $K = 1, n = 0,5$

Pada gambar (5.12), pada fluida mikrokutub yang berkonsentrasi setengah pekat, terlihat bahwa pada $0 < \eta < 3$ kecepatan mikrorotasi fluida akan semakin besar seiring dengan bertambahnya parameter magnetik yang diberikan. Hal ini terjadi karena pada aliran fluida setengah pekat (aliran transisi), bilangan Reynoldsnnya kecil sehingga tidak berpengaruh secara signifikan untuk menarik massa partikel yang dapat mengakibatkan lambatnya mikrorotasi. Sehingga kecepatan mikrorotasinya akan semakin besar.



Gambar 5.13 : Profil Mikrorotasi dengan Variasi Parameter Magnetik, $K = 1, n = 1$

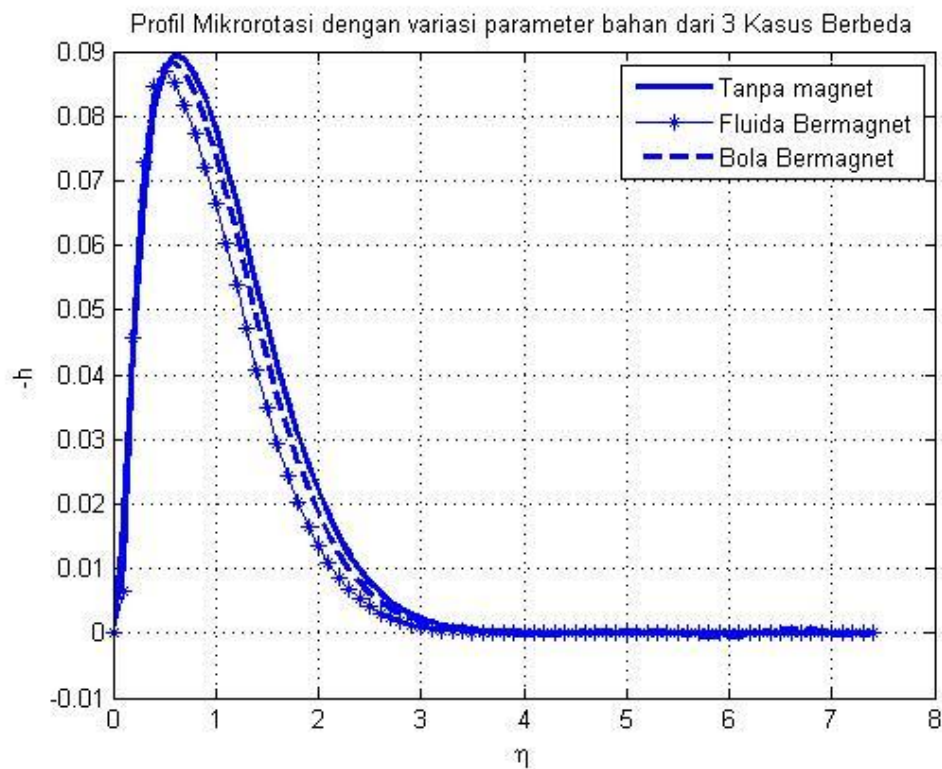
Pada gambar (5.13), pada fluida mikrokutub yang mengalir secara turbulen, terlihat bahwa pada $0 < \eta < 3$ kecepatan mikrorotasi fluida akan semakin besar seiring dengan bertambahnya parameter magnetik yang diberikan.

5.2.4. Pengaruh Variasi Parameter Bahan terhadap Profil Mikrorotasi

Selain berpengaruh pada profil kecepatan, parameter bahan juga memberikan pengaruh terhadap profil mikrorotasi dari fluida mikrokutub. Sebelum dibahas mengenai hasil simulasi numerik dari penelitian ini, ditunjukkan perbedaan profil mikrorotasi pada fluida mikrokutub konsentrasi pekat ($n = 0$) dengan $K = 1$ yang terjadi pada 3 kasus yaitu :

1. Fluida dan bola yang tidak bermagnet ($M = 0$),
2. Fluida bermagnet ($M = 5$) dengan bola yang tidak bermagnet (Anggriani : 2015),
3. Bola bermagnet dan fluida yang terinduksi magnet dari bola ($M = 5$).

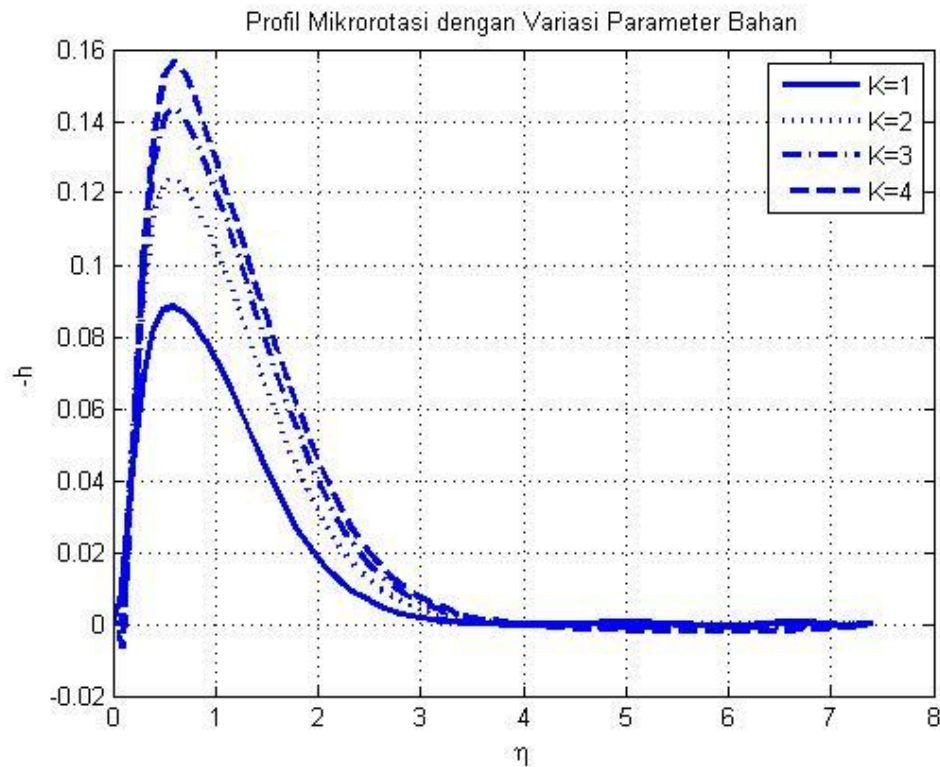
Hasil simulasi dari ketiga kasus tersebut diperoleh sebagai berikut :



Gambar 5.14 : Perbedaan Profil Mikrorotasi dengan variasi parameter mikropolar pada 3 Kasus yang berbeda

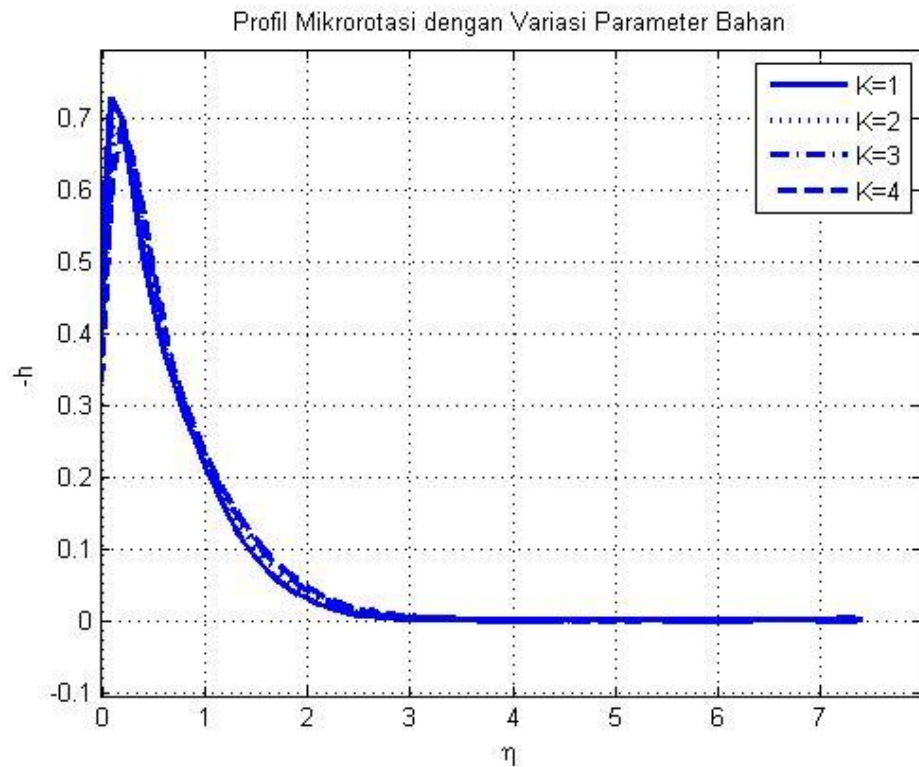
Pada gambar (5.14), terlihat bahwa pada $0 < \eta < 3.5$, terdapat perbedaan profil mikrorotasi dari fluida mikrokutub yang terjadi pada ketiga kasus di atas. Hal ini ditunjukkan bahwa pada kasus 1, profil mikrorotasinya lebih besar jika dibandingkan dengan kasus 2. Namun profil mikrorotasi dari kasus 2 lebih kecil dibandingkan dengan profil mikrorotasi pada kasus 3. Hal tersebut berarti bahwa dari ketiga kasus di atas, kasus 3 memiliki profil mikrorotasi yang lebih kecil daripada kasus 1 namun lebih besar dari kasus 2.

Selanjutnya dibahas tentang profil mikrorotasi dari penelitian ini dengan beberapa variasi parameter bahan dan dengan parameter magnetik $M = 1$ sebagai berikut :



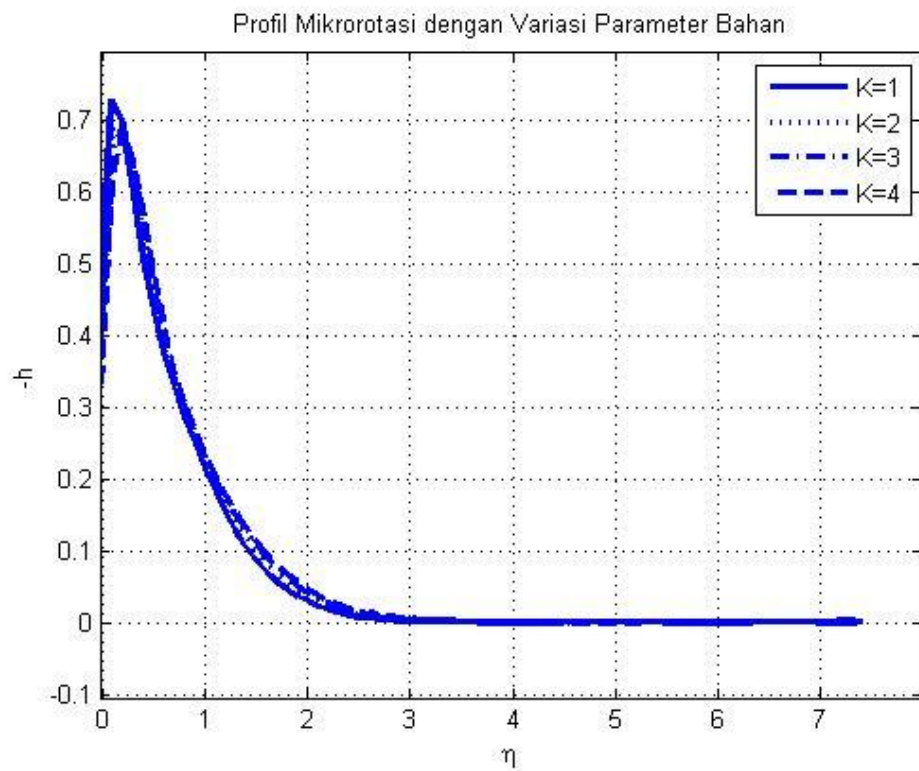
Gambar 5.15 : Profil Mikrorotasi dengan Variasi Parameter Bahan, $M = 1, n = 0$

Pada gambar (5.15), pada fluida mikrokutub yang berkonsentrasi pekat, terlihat bahwa pada $0 < \eta < 4$ ketika pertama menyentuh permukaan bola pada titik stagnasi, kecepatannya adalah nol yang berarti rasio antara gesekan fluida dipermukaan dengan komponen vektor mikrorotasi bernilai nol. Hal ini menyebabkan elemen mikro yang berada di dekat permukaan bola tidak dapat melakukan mikrorotasi. Ketika semakin menjauhi titik stagnasi, kecepatannya akan semakin meningkat saat ketebalan lapisan batas mendekati nilai 1 dan akan menurun secara signifikan menuju (konvergen) ke nilai 0. Dengan diberikan variasi parameter bahan, profil mikrorotasi yang terbentuk semakin besar seiring dengan besarnya variasi parameter bahan yang diberikan. Hal ini berarti elemen mikro berhenti berotasi saat lapisan batas semakin menebal.



Gambar 5.16 : Profil Mikrorotasi dengan Variasi Parameter Bahan, $M = 1, n = 0,5$

Pada gambar (5.16), pada fluida mikrokutub yang berkonsentrasi setengah pekat, terlihat bahwa $0 < \eta < 3$, kecepatan fluida akan semakin besar seiring dengan bertambahnya parameter bahan yang diberikan. Hal ini terjadi karena pada aliran fluida setengah pekat (aliran transisi), bilangan Reynoldsnnya kecil sehingga tidak berpengaruh secara signifikan untuk menarik massa partikel yang dapat mengakibatkan lambatnya mikrorotasi. Sehingga kecepatan mikrorotasinya akan semakin besar.



Gambar 5.17 : Profil Mikrorotasi dengan Variasi Parameter Bahan, $M = 1, n = 1$

Pada gambar (5.17), pada fluida mikrokutub yang mengalir secara turbulen, terlihat bahwa pada $0 < \eta < 3$ kecepatan mikrorotasi fluida akan semakin besar seiring dengan bertambahnya parameter bahan yang diberikan.

BAB VI

KESIMPULAN DAN SARAN

6.1.Kesimpulan

Berdasarkan analisa, pembahasan, serta simulasi numerik dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet maka dapat disimpulkan bahwa pengaruh parameter magnetik dan mikropolar terhadap profil kecepatan dan profil mikrorotasi pada aliran fluida dengan $n = 0, n = 0,5$, dan $n = 1$:

- a. Semakin besar parameter magnetik, maka semakin meningkat pula profil kecepatan aliran fluida mikrokutub.
- b. Semakin besar parameter bahan, maka semakin menurun profil kecepatan aliran fluida mikrokutub.
- c. Semakin besar parameter magnetik, maka profil mikrorotasi akan semakin kecil untuk $n = 0$. Sedangkan untuk $n = 0,5$ dan $n = 1$, semakin besar parameter magnetik, maka profil mikrorotasi akan semakin besar.

6.2.Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan pada permasalahan ini, saran yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya adalah :

1. Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan studi tidak pada titik stagnasi dengan fluida yang bermuatan magnet, namun benda yang tidak bermagnet.
2. Pada penelitian selanjutnya dapat pula dilakukan studi tidak pada titik stagnasi dengan bola yang bermuatan magnet dan fluida yang terinduksi magnet dari bola.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdel-Rahman, G. M. (2009). Studying effect of MHD on Thin films of a micropolar fluid. *Physica B: Condensed Matter*. 404(21):3859-3866.
- Borrelli, A., Giamtesio, G. and Patria, M. C. (2012). MHD oblique stagnation-point flow of a micropolar fluid. *Applied Mathematical Modelling*. 36(9):3949-3970.
- Brujan, E.A. (2011). Cavitation in Non-Newtonian Fluids. *Non-Newtonian Fluids* (pp.1-47). Springer Berlin Heidelberg.
- Das, K. (2012). Slip effects on MHD mixed convection stagnation point flow of a micropolar fluid towards a shrinking vertical sheet. *Computers & Mathematics with Applications*. 63(1): 255-267.
- Effendi, dkk. (2007). Medan Elektromagnetika Terapan. Jakarta : Erlangga.
- Ghani, M., Widodo, B. and Imron, C. (2015) *Incompressible And Mixed Convection Flow Steady Over Past A Sphere*, The 1st Young Scientist International Conference of Water Resources Development and Environmental Protection, Malang, Indonesia, 5-7 June 2015.
- Imron, C., Suhariningsih, Widodo, B. dan Yuwono, T. (2013), Numerical Simulation of Fluid Flow Around Circular and I-Shape Cylinder in a Tandem Configuration, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 7, 2013, no. 114, 5657 – 5666, HIKARI Ltd Journals and Books Publisher, Bulgaria.
- Mohammad, N. F., Mohd Kasim, A. R., Ali, A. and Shafie, S. (2012). Unsteady mixed convection boundary layer flow past a sphere in a micropolar fluid. In *American Institute of Physics Conference Series*. Vol. 1450. 211-217.
- Potter dan Wiggert. (2011). *Mekanika Fluida*. Jakarta : Erlangga.
- Pradikawanti, Widodo, B. and Imron, C. (2015) *Viscoelastic Fluid Past A Flat Plate With The Effect Of Magnetohydrodynamic*, The 1st Young Scientist International Conference of Water Resources Development and Environmental Protection, University of Brawijaya Malang, 5-7 Juni 2015.
- Rumite, W., Widodo, B. and Imron, C. (2015) *The Numerical Solution Of Free Convection Flow Of Visco-Elastic Fluid Heat Generation Past With Over A Sphere*, The 1st Young Scientist International Conference of Water

- Resources Development and Environmental Protection, Malang, Indonesia, 5-7 June 2015.
- Sajid, M. and Hayat, T. (2009). The application of homotopy analysis method for MHD viscous flow due to a shrinking sheet. *Chaos, Solitons & Fractals*. 39(3):1317-1323.
- Satya Narayana, P., Venkateswarlu, B. and Venkataramana, S. (2013). Effects of Hall current and radiation absorption on MHD micropolar fluid in a rotating system. *Ain Shams Engineering Journal*. 4(4):843-854.
- Srinivasacharya, D. And Upendar, M. (2013). Soret and dufour effects on MHD mixed convection heat and mass transfer in a micropolar fluid. *Central European Journal of Engineering*. 3(4):679-689.
- Tafrikan, M., Widodo, B. and Imron, C. (2015) *Heat Effect On Free Convection Fluid Flow Past A Porosity Sphere*, The Young Scientist 1st International Conference of Water Resources Development and Environmental Protection, Malang, Indonesia, 5-7 June 2015.
- Uddin, Z. and Kumar, M. (2013). Hall and ion-slip effect on MHD boundary layer flow of a micropolar fluid past a wedge. *Scientia Iranica*. 20(3):467-476.
- Widodo, B. (2012). The Influence Of Hydrodynamics On Pollutant Dispersion In The River. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences (IJCMS)* ISSN 1312-7586. Vol. 7. 2012. no. 45, from 2229 to 2234, HIKARI Ltd Journals and Books Publisher. Bulgaria.
- Widodo, B. (2013), Mathematical Modeling of Total Suspended Solid Occurred in A Confluence of Two Rivers, submitted to The International Journal of Applied Mathematical Sciences (International journals and books publishers of science, technology and medicine, Hikari Ltd Bulgaria).
- Widodo, B. (2015). Aliran Konveksi Campuran Dari Fluida Viskoelastik Hidrodinamika Magnet Yang Melewati Permukaan Sebuah Bola Pejal, SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PEMBELAJARANNYA, 5 September 2015, di UM Malang.
- Widodo, B., Imron, C., Asiyah, N., Siswono, G.O., Rahayuningsih, T. and Purbandini (2016). Viscoelastic Fluid Flow Past a Porous Circular Cylinder when

The Magnetic Field Included, Far East Journal Mathematical and Sciences (Puspha Publishing House India), Vol 99 No 2: 173-186.

Widodo, B., Sulistyningtyas, A.N., and Imron, C. (2015a). The Effect Of Prandtl Number And Viscosity Variable On Free Convection Boundary Layer Flow of A Viscoelastic Fluid Past An Elliptic Cylinder, International Research Conference on Science, Health and Medicine (ICSHM) 2015, academics world, Bangkok – Thailand, 16 Juni 2015.

Widodo, B., Siswono, G.O. and Imron, C. (2015b). Viscoelastic Fluid Flow With The Presence Of Magnetic Field Past A Porous Circular Cylinder, International Research Conference on Science, Health and Medicine (ICSHM) 2015, academics world, Bangkok – Thailand, 16 Juni 2015.

Widodo, B., Anggriani, I. and Imron, C. (2015c) The characterization of Boundary Layer Flow in The Magnetohydrodynamic Micropolar Fluid Past a Solid Sphere, International Conference on Science and Innovative Engineering (ICSIE), Kuala Lumpur - Malaysia, October 16, 2015.

Widodo, B., Khalimah, D.A., Zainal, F.D.S. and Imron, C. (2015d) The Effect of Prandtl Number and Magnetic Parameters on unsteady magnetohydrodynamic Forced Convection Boundary Layer Flow of a Viscous Fluid Past A Sphere, International Conference on Science and Innovative Engineering (ICSIE), Kuala Lumpur - Malaysia, October 16, 2015.

Widodo, B., Ningtyas, R.A., and Imron, C. (2016) Unsteady Magnetohydrodynamic Micropolar Fluid in Boundary Layer Flow Past a Sliced Sphere.

Wiyanto. 2008. Elektromagnetika. Jogjakarta : Graha Ilmu.

LAMPIRAN

Lampiran 1 : Penyelesaian Persamaan Pembangun ke Persamaan Non Dimensional

1. Persamaan Kontinuitas :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \frac{\partial (aruU_\infty)}{(ax)} + \frac{\partial (arvU_\infty Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial (ayRe^{-\frac{1}{2}})} &= 0 \\ \frac{aU_\infty}{a} \frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{aU_\infty}{a} \frac{\partial rv}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

2. Persamaan Momentum Linier Sumbu - x :

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + k \frac{\partial^{2N}}{\partial \bar{y}^2} - \\ &\sigma (b + B_0)^2 \bar{u}\end{aligned}$$

Ruas kiri :

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \left(\frac{\partial (uU_\infty)}{\partial \left(\frac{at}{U_\infty} \right)} + (uU_\infty) \frac{\partial (uU_\infty)}{\partial (ax)} + \left(\frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right) \frac{\partial (uU_\infty)}{\partial (ayRe^{-\frac{1}{2}})} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \left(\frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(uU_\infty^2)}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(vU_\infty^2)}{a} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \frac{U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Ruas kanan :

$$- \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + k \frac{\partial^{2N}}{\partial \bar{y}^2} - \sigma (b + B_0)^2 \bar{u}$$

$$= -\frac{\partial(\rho p U_{\infty}^2)}{\partial(ax)} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2(uU_{\infty})}{\partial(ax)^2} + \frac{\partial^2(uU_{\infty})}{\partial\left(\frac{ay}{Re^2}\right)^2} \right) + k \frac{\partial\left(\frac{NU_{\infty}}{aRe^2}\right)}{\partial\left(\frac{ay}{Re^2}\right)} -$$

$$\sigma(b + B_0)^2(uU_{\infty})$$

$$= -\frac{(\rho U_{\infty}^2)}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + k) \left(\frac{U_{\infty}}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{U_{\infty}}{a^2} Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + k \frac{\left(\frac{U_{\infty}}{aRe^2}\right)}{\left(\frac{ay}{Re^2}\right)} \frac{\partial N}{\partial y} -$$

$$\sigma(b + B_0)^2(uU_{\infty})$$

$$= -\frac{(\rho U_{\infty}^2)}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + k) \left(\frac{U_{\infty}}{a^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + k \frac{U_{\infty} Re}{a^2} \frac{\partial N}{\partial y} -$$

$$\sigma(b + B_0)^2(uU_{\infty})$$

Dengan menyamadenngankan ruas kiri dan ruas kanan maka diperoleh :

$$\rho \frac{U_{\infty}^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{(\rho U_{\infty}^2)}{a} \frac{\partial p}{\partial x} +$$

$$(\mu + k) \left(\frac{U_{\infty}}{a^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \sigma(b + B_0)^2(uU_{\infty})$$

Dengan membagi kedua ruas dengan $\rho \frac{U_{\infty}^2}{a}$, maka diperoleh :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\mu + k}{a\rho U_{\infty}} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) +$$

$$k \frac{Re}{a\rho U_{\infty}} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\sigma(b + B_0)^2 u a}{\rho U_{\infty}}$$

Karena $M = \frac{a\sigma(b+B_0)^2}{\rho U_{\infty}}$ dan $K = \frac{k}{\mu}$ serta telah diasumsikan bahwa $b = \frac{1}{4}B_0$, sehingga diperoleh :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\mu + \mu K}{a\rho U_{\infty}} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) +$$

$$\frac{\mu K Re}{a\rho U_{\infty}} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{25}{16} Mu$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\mu(1 + K)}{a\rho U_{\infty}} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) +$$

$$\frac{\mu Re K}{a \rho U_{\infty}} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{25}{16} Mu$$

Karena $Re = \frac{a \rho U_{\infty}}{\mu}$, maka :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + Re^{-1} (1 + K) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + Re^{-1} Re K \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{25}{16} Mu$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(1 + K)}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + K \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{25}{16} Mu$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(1 + K)}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{25}{16} Mu$$

3. Persamaan Momentum Linier Sumbu - y :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} - \sigma (b + B_0)^2 \bar{v}$$

Ruas kiri :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) =$$

$$\rho \left(\frac{\partial \left(\frac{v U_{\infty}}{Re^{1/2}} \right)}{\partial \left(\frac{at}{U_{\infty}} \right)} + (u U_{\infty}) \frac{\partial \left(\frac{v U_{\infty}}{Re^{1/2}} \right)}{\partial (ax)} + \left(\frac{v U_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) \frac{\partial \left(\frac{v U_{\infty}}{Re^{1/2}} \right)}{\partial \left(ay Re^{-\frac{1}{2}} \right)} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) =$$

$$\rho \left(\left(\frac{\frac{U_{\infty}}{Re^{1/2}}}{\left(\frac{a}{U_{\infty}} \right)} \right) \frac{\partial v}{\partial t} + (u U_{\infty}) \frac{\left(\frac{U_{\infty}}{Re^{1/2}} \right)}{a} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{v U_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) \frac{\left(\frac{v U_{\infty}}{Re^{1/2}} \right)}{\left(a Re^{-\frac{1}{2}} \right)} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = \rho \left(\frac{U_{\infty}^2}{a Re^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u U_{\infty}^2}{a Re^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v U_{\infty}^2}{a Re^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = \rho \frac{U_{\infty}^2}{a Re^{1/2}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Ruas kanan :

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} - \sigma(b + B_0)^2 \bar{v} \\ & = -\frac{\partial(\rho p U_{\infty}^2)}{\partial \left(a y Re^{-\frac{1}{2}} \right)} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{v U_{\infty}}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)}{\partial (ax)^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{v U_{\infty}}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)}{\partial \left(\frac{ay}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)^2} \right) - k \frac{\partial \left(\frac{N U_{\infty}}{a Re^{\frac{1}{2}}} \right)}{\partial (ax)} - \\ & \sigma(b + B_0)^2 \left(\frac{v U_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) \\ & = -\frac{(\rho U_{\infty}^2)}{\left(a Re^{-\frac{1}{2}} \right)} \frac{\partial p}{\partial y} + (\mu + k) \left(\frac{\left(\frac{U_{\infty}}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\left(\frac{U_{\infty}}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)}{\left(\frac{a^2}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k \frac{\left(\frac{U_{\infty}}{a Re^{\frac{1}{2}}} \right)}{a} \frac{\partial N}{\partial x} - \\ & \sigma(b + B_0)^2 \left(\frac{v U_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) \\ & = -\frac{(\rho U_{\infty}^2 Re^{\frac{1}{2}})}{a} \frac{\partial p}{\partial y} + (\mu + k) \left(\frac{U_{\infty}}{a^2 Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{U_{\infty} Re^{\frac{1}{2}}}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k \frac{U_{\infty}}{a^2 Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial N}{\partial x} - \\ & \sigma(b + B_0)^2 \left(\frac{v U_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) \end{aligned}$$

Dengan menyamakan ruas kiri dan ruas kanan maka diperoleh :

$$\begin{aligned} \rho \frac{U_{\infty}^2}{a Re^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) & = -\frac{(\rho U_{\infty}^2 Re^{\frac{1}{2}})}{a} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ (\mu + k) \left(\frac{U_{\infty}}{a^2 Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{U_{\infty} Re^{\frac{1}{2}}}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) & - k \frac{U_{\infty}}{a^2 Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial N}{\partial x} - \sigma(b + B_0)^2 \left(\frac{v U_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) \end{aligned}$$

Dengan membagi kedua ruas dengan $\rho \frac{U_\infty^2 Re^{1/2}}{a}$ dan Karena $M = \frac{a\sigma(b+B_0)^2}{\rho U_\infty}$ serta $K = \frac{k}{\mu}$. Selain itu telah diasumsikan bahwa $b = \frac{1}{4}B_0$ maka diperoleh :

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1+K}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+K}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{K}{Re^2} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{25}{16} \frac{M}{Re} v$$

4. Persamaan momentum angular :

$$\rho I \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = \gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k \left(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)$$

Ruas kiri :

$$\rho I \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) =$$

$$\rho I \left(\frac{\partial \left(\frac{NU_\infty}{aRe^{-1/2}} \right)}{\partial \left(\frac{at}{U_\infty} \right)} + (uU_\infty) \frac{\partial \left(\frac{NU_\infty}{aRe^{-1/2}} \right)}{\partial (ax)} + \left(\frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right) \frac{\partial \left(\frac{NU_\infty}{aRe^{-1/2}} \right)}{\partial \left(\frac{ay}{Re^{1/2}} \right)} \right)$$

$$\rho I \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) =$$

$$\rho I \left(\left(\frac{\frac{U_\infty}{aRe^{-1/2}}}{\left(\frac{a}{U_\infty} \right)} \right) \frac{\partial N}{\partial t} + (uU_\infty) \frac{\left(\frac{U_\infty}{aRe^{-1/2}} \right) \frac{\partial N}{\partial x}}{(a)} + \left(\frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right) \frac{\left(\frac{U_\infty}{aRe^{-1/2}} \right) \frac{\partial N}{\partial y}}{\left(\frac{a}{Re^{1/2}} \right)} \right)$$

$$\rho I \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) =$$

$$\rho I \left(\frac{U_\infty^2}{a^2 Re^{-1/2}} \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{U_\infty^2}{a^2 Re^{-1/2}} \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{U_\infty^2}{a^2 Re^{-1/2}} \frac{\partial N}{\partial y} \right)$$

$$\rho I \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = \rho I \left(\frac{U_\infty^2}{a^2 Re^{-1/2}} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right)$$

Ruas kanan :

$$\gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k \left(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) =$$

$$\left(\mu + \frac{K\mu}{2} \right) I \left(\frac{\partial^2 NU_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{\partial x^2 a^2 a} + \frac{\partial^2 NU_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{\partial y^2 a^2 \left(Re^{\frac{1}{2}} \right)^2 a} \right) -$$

$$(K\mu)I \left(2 \frac{NU_{\infty}Re^{1/2}}{a} + \frac{\partial u U_{\infty}Re^{1/2}}{\partial a y a} - \frac{\partial v U_{\infty}}{\partial x a Re^{1/2}} \right)$$

$$\gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k \left(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) =$$

$$\left(1 + \frac{K}{2} \right) \mu I \left(\frac{U_{\infty} Re^{\frac{1}{2}}}{a^3} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) -$$

$$K\mu I \left(\frac{U_{\infty}}{a} 2N Re^{\frac{1}{2}} + \frac{U_{\infty}}{a} Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{U_{\infty}}{a} Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Ruas kiri sama dengan ruas kanan, sehingga :

$$\rho I \left(\frac{U_{\infty}^2}{a^2 Re^{-\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) =$$

$$\left(1 + \frac{K}{2} \right) \mu I \left(\frac{U_{\infty} Re^{\frac{1}{2}}}{a^3} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) -$$

$$K\mu I \left(\frac{U_{\infty}}{a} 2N Re^{\frac{1}{2}} + \frac{U_{\infty}}{a} Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{U_{\infty}}{a} Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\rho I \frac{U_{\infty}^2}{a^2} Re^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) =$$

$$\left(1 + \frac{K}{2} \right) \rho \nu I \left(\frac{U_{\infty} Re^{\frac{1}{2}}}{a^3} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) -$$

$$K\rho \nu I \left(\frac{U_{\infty}}{a} 2N Re^{\frac{1}{2}} + \frac{U_{\infty}}{a} Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{U_{\infty}}{a} Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Kedua ruas dibagi dengan $\frac{U_{\infty}^2}{a^2} Re^{\frac{1}{2}}$, Maka diperoleh :

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) = \left(1 + \frac{K}{2} \right) \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Lampiran 2 : *Free Stream*

Kecepatan aliran bebas (*Free Stream*) dalam bentuk koordinat bola (*Spherical*) adalah :

$$U_r = -U_\infty \cos \theta \quad (2.1)$$

$$U_\theta = U_\infty \sin \theta \quad (2.2)$$

$$U_\phi = 0 \quad (2.3)$$

Menurut John (2010), *Streamline* kecepatan adalah :

$$U = \nabla \phi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^3} e_r + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3} e_\theta + 0 e_\phi \quad (2.4)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (2.1), (2.2), dan (2.3) ke (2.4) diperoleh :

$$U_r = -U_\infty \cos \theta + \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^3} = -\left(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi r^3}\right) \cos \theta \quad (2.5)$$

$$U_\theta = U_\infty \sin \theta + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3} = \left(U_\infty + \frac{\mu}{4\pi r^3}\right) \sin \theta \quad (2.6)$$

$$U_\phi = 0 \quad (2.7)$$

Titik stagnasi pada aliran fluida ditentukan dari $U_r = U_\theta = 0$. Pada Persamaan (2.6) $U_\theta = 0$ diberikan $\sin \theta = 0$. Hal ini berarti titik stagnasi terletak di $\theta = 0$ dan π . Pada Persamaan (2.5) diberikan $U_r = 0$, maka :

$$U_\infty - \frac{\mu}{2\pi r^3} = 0 \quad (2.8)$$

dengan $r = R$ merupakan koordinat jari-jari titik stagnasi. Penyelesaian dari Persamaan (2.8) untuk memperoleh nilai R adalah :

$$\mu = 2\pi R^3 U_\infty \quad (2.9)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (2.9) ke Persamaan (2.5) diperoleh :

$$U_r = -\left(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi R^3}\right) \cos \theta = -\left\{U_\infty - \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{2\pi U_\infty}{\mu}\right)\right\} \cos \theta$$

$$= -(U_\infty - U_\infty) \cos \theta = 0, \text{ sehingga}$$

$$U_r = 0 \quad (2.10)$$

Dari Persamaan (2.10), diperoleh bahwa saat $r = R$ untuk setiap nilai θ dan ϕ , daerah kecepatan yang diberikan pada Persamaan (2.5), (2.6), dan (2.7) adalah aliran *incompressible* yang melalui bola berjari-jari R . Pada permukaan bola, dengan $r = R$, kecepatan tangensial didefinisikan pada Persamaan (2.6). Dengan mensubstitusikan Persamaan (2.9) ke Persamaan (2.6) maka diperoleh :

$$U_\theta = \left(U_\infty + \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi R^3 U_\infty}{R^3}\right) \sin \theta$$

Atau dapat dituliskan

$$U_\theta = \frac{3}{2} U_\infty \sin \theta \quad (2.11)$$

Lampiran 3 : Perhitungan Persamaan Similaritas

Berdasarkan hasil dari transformasi Persamaan tak berdimensi, selanjutnya dilakukan proses transformasi ke dalam bentuk Persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi alir, yaitu :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

dengan variabel-variabel similaritas yaitu

$$\Psi = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)$$

dengan ,

$$\eta = \frac{y}{t^{1/2}}$$

$$N = t^{-\frac{1}{2}} u_e(x) h(x, \eta, t)$$

Sehingga diperoleh

1. Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-r \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}$$

2. Persamaan momentum linier

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{25}{16} M(u - u_e)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right) =$$

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{25}{16} M \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - u_e \right)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\
& = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} + K \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{25}{16} M \left(u_e - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right)
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial y} &= \frac{\partial \left(t^{-\frac{1}{2}} u_e(x) h(x, \eta, t) \right)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = t^{-\frac{1}{2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{1}{t^{1/2}} = \frac{u_e(x)}{t} \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\
\frac{\partial \eta}{\partial y} &= t^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2} y t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{y}{t^{1/2}} \frac{1}{t} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \left(t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \right)}{\partial \eta} \frac{1}{t^{1/2}} = u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial \left(t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \right)}{\partial x} \\
&= t^{1/2} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} r(x) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} + t^{1/2} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} \\
&\quad + t^{1/2} f(x, \eta, t) u_e(x) \frac{\partial r(x)}{\partial x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{t} u_e(x) r(x) \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) \frac{\partial r(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + \\
&u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta} \\
&= -\frac{u_e(x) r(x) \eta}{t} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{2 \partial \eta^2} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta}
\end{aligned}$$

Selanjutnya $u_e(x) = u_e$; $r(x)$; $f(x, \eta, t) = f$, momentum linier menjadi:

Ruas kiri:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left(-\frac{u_e r \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \right) + \frac{1}{r^2} \left(u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial u_e}{\partial x} r \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) \\ & - \frac{1}{r^3} \frac{d}{dx} \left(u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(t^{\frac{1}{2}} f r \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{\frac{1}{2}} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} + t^{\frac{1}{2}} f u_e \frac{\partial r}{\partial x} \right) \\ & \left(\frac{1}{t^{1/2}} u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = -\frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} + \frac{u_e}{r} \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u_e}{\partial x} r \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) - \\ & \frac{1}{r^3} \frac{d}{dx} u_e^2 r^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \left(\frac{u_e}{r t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \left(t^{1/2} f r \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} + t^{1/2} f u_e \frac{\partial r}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow -\frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e^2}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \\ & \frac{1}{r^3} \frac{d}{dx} u_e^2 r^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - u_e f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{u_e^2 f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow -\frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e^2}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \\ & \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} u_e^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e - \frac{u_e^2}{r} f \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Ruan kanan:

$$\begin{aligned} & u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1+K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + K \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{25}{16} M \left(u_e - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \\ & = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1+K) \frac{1}{r} \left(\frac{1}{t} u_e r \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + K \left(\frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) - \frac{25}{16} M \left(u_e - \left(\frac{1}{r} \left(u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1+K) \left(\frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + K \frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{25}{16} M \left(u_e - u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)$$

$$\Leftrightarrow u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1+K) \left(\frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + K \frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{25}{16} M u_e \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)$$

Ruas kiri = Ruas kanan dan dibagi $\frac{u_e}{t}$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{r} t u_e \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + t u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \\
& \frac{1}{r} \frac{d}{dx} t u_e \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{t}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e - \frac{1}{r} f t u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - t u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \\
& t \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + K \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{25}{16} M t \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& (1 + K) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[1 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] + K \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{25}{16} M t \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = \\
& t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} f \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

Lampiran 4 : Penurunan Kondisi Awal

Persamaan yang digunakan untuk menentukan nilai awal adalah :

$$(1 + K)f''' + \frac{\eta}{2}f'' + Kh' + \frac{3}{2}t[1 - (f')^2 + ff''] + \frac{25}{16}Mt(1 - f') = t \frac{\partial f'}{\partial t}$$

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right)h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{1}{2}h + \frac{3}{2}t(fh' - hf') = t \frac{\partial h}{\partial t} + tK(2h + f'')$$

dengan $t = 0$, maka kedua Persamaan di atas dapat dituliskan :

$$(1 + K)f''' + \frac{\eta}{2}f'' + Kh' = 0$$

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right)h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{1}{2}h = 0$$

Persamaan tersebut diubah ke Persamaan orde satu dengan memisalkan $f'' = s$, sehingga diperoleh :

$$(1 + K)s' + \frac{\eta}{2}s + Kh' = 0$$

diketahui bahwa $h = -nf''$, maka

$$(1 + K)s' + \frac{\eta}{2}s + Kns' = 0$$

$$(1 + K(1 - n))s' + \frac{\eta}{2}s = 0$$

dengan $s' = \frac{ds}{d\eta}$, maka diperoleh

$$(1 + K(1 - n))\frac{ds}{d\eta} + \frac{\eta}{2}s = 0$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan $d\eta$ maka

$$(1 + K(1 - n))ds + \frac{\eta}{2}s d\eta = 0$$

Dengan mengalikan $\frac{1}{s}$ maka

$$\frac{(1 + K(1 - n))}{s}ds + \frac{\eta}{2}d\eta = 0$$

Dengan mengintegrasikan kedua ruas maka diperoleh

$$(1 + K(1 - n))\ln s + \frac{\eta^2}{4} = c_1$$

$$(1 + K(1 - n)) \ln s = c_1 - \frac{\eta^2}{4}$$

$$\ln s = \frac{c_1}{(1 + K(1 - n))} - \frac{\eta^2}{4(1 + K(1 - n))}$$

Dengan mengubah ruas kanan ke dalam bentuk \ln , maka

$$s = e^{\left(\frac{c_1}{(1+K(1-n))} - \frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}\right)}$$

jika $s = f''$, maka untuk mendapatkan nilai dari f' adalah

$$f' = \int e^{\left(\frac{c_1}{(1+K(1-n))} - \frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}\right)} d\eta$$

$$f' = e^{\frac{c_1}{(1+K(1-n))}} \int e^{\left(-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}\right)} d\eta$$

Dengan rumus integral eksponensial yang juga mensubstitusikan fungsi error (erf) maka

$$f' = e^{\frac{c_1}{(1+K(1-n))}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{4 \cdot \frac{1}{4(1+K(1-n))}}} erf \left(\sqrt{\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}} \right) \right)$$

$$f' = \sqrt{\pi(1 + K(1 - n))} erf \left(\frac{\eta}{2(1 + K(1 - n))} \right) e^{\frac{c_1}{(1+K(1-n))}} + c_2$$

dengan kondisi batas

$$t \geq 0 : f' = 0, h = -nf'' , \text{ saat } \eta = 0$$

$$f' = 1, \text{ saat } \eta \rightarrow \infty$$

Kemudian ditentukan nilai dari c_2 dengan mensubstitusi kondisi batas $f' = 0$ saat

$$\eta = 0$$

$$f' = \sqrt{\pi(1 + K(1 - n))} erf \left(\frac{\eta}{2(1 + K(1 - n))} \right) e^{\frac{c_1}{(1+K(1-n))}} + c_2$$

$$c_2 = 0$$

Saat $f' = 1$ dan $\eta \rightarrow \infty$ diperoleh $e^{\frac{c_1}{(1+K(1-n))}}$, dengan $erf(\infty) = 1$, maka

$$f' = \sqrt{\pi(1 + K(1 - n))} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2(1 + K(1 - n))}\right) e^{\frac{c_1}{(1 + K(1 - n))}}$$

$$1 = \sqrt{\pi(1 + K(1 - n))} \operatorname{erf}(\infty) e^{\frac{c_1}{(1 + K(1 - n))}}$$

$$1 = \sqrt{\pi(1 + K(1 - n))} e^{\frac{c_1}{(1 + K(1 - n))}}$$

$$e^{\frac{c_1}{(1 + K(1 - n))}} = \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + K(1 - n))}}$$

dengan melakukan substitusi c_2 dan $e^{\frac{c_1}{(1 + K(1 - n))}}$ pada f' , maka diperoleh

$$f' = \sqrt{\pi(1 + K(1 - n))} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2(1 + K(1 - n))}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + K(1 - n))}}$$

$$f' = \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2(1 + K(1 - n))}\right)$$

dengan mengintegrasikan f' maka diperoleh nilai f sebagai berikut :

$$f = \int f' d\eta$$

$$f = \int \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2(1 + K(1 - n))}\right) d\eta$$

$$f = \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2(1 + K(1 - n))}\right) + 2 \sqrt{\frac{(1 + K(1 - n))}{\pi}} \left(e^{-\frac{\eta^2}{4(1 + K(1 - n))}} \right) + c_3$$

nilai c_3 diperoleh dengan mensubstitusikan kondisi batas $f' = 1$ saat $\eta \rightarrow \infty$

$$1 = \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2(1 + K(1 - n))}\right) + 2 \sqrt{\frac{(1 + K(1 - n))}{\pi}} \left(e^{-\frac{\eta^2}{4(1 + K(1 - n))}} \right) + c_3$$

$$c_3 = -1$$

Sehingga

$$f = \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2(1 + K(1 - n))}\right) + 2 \sqrt{\frac{(1 + K(1 - n))}{\pi}} \left(e^{-\frac{\eta^2}{4(1 + K(1 - n))}} - 1 \right)$$

f'' diperoleh dengan menurunkan f' yaitu

$$f'' = \frac{df'}{d\eta}$$

$$f'' = \frac{d}{d\eta} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2(1+K(1-n))} \right) \right)$$

$$f'' = \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2(1+K(1-n))} \right) \right)$$

$$f'' = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}}$$

f''' diperoleh dengan menurunkan f'' yaitu

$$f''' = \frac{df''}{d\eta}$$

$$f''' = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}} \right)$$

$$f''' = -\frac{\eta}{2(1+K(1-n))\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}}$$

Kemudian nilai h diperoleh dari

$$h = -n f''$$

$$h = -n \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}}$$

dan nilai h' diperoleh dari

$$h' = -n f'''$$

$$h' = \frac{n\eta}{2(1+K(1-n))\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}}$$

BIODATA PENULIS



Penulis dengan nama lengkap Rizky Verdyanto Pratomo lahir di Surabaya Jawa Timur pada tanggal 12 April 1993. Penulis menempuh jenjang pendidikan formal dimulai dari Sekolah Dasar di SDN Gading 1 Surabaya, kemudian dilanjutkan ke jenjang Sekolah Menengah Pertama di SMPN 18 Surabaya. Setelah itu penulis melanjutkan ke Sekolah Menengah Atas di SMAN 3 Surabaya. Setelah tamat SMA, penulis melanjutkan studi di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas PGRI Adibuana Surabaya. Penulis menyelesaikan Studi Strata-1 selama 8 semester dengan menulis Skripsi yang berjudul ” Pengaruh Penerapan *Drill and Practice Method* Terhadap Prestasi Belajar Matematika Siswa di SMPN 10 Surabaya”. Kemudian setelah menyelesaikan Program Strata-1, penulis melanjutkan ke jenjang Strata-2 pada tahun 2015 dan masuk pada semester genap. Penulis menyelesaikan studi Strata-2 dengan menulis Tesis yang berkonsentrasi pada *Computational Fluid Dynamics (CFD)* dengan judul ”Magnetohidrodinamik Yang Tak Tunak Pada Lapisan Batas Yang Mengalir Melalui Bola Di Dalam Fluida Mikroktub Di Bawah Pengaruh Medan Magnet”. Jika membutuhkan informasi yang berkaitan dengan Tesis ini, penulis dapat dihubungi melalui email rizkypratomo93@gmail.com.